



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

STABILIZACE CHAOSU: METODY A APLIKACE

THE CONTROL OF CHAOS: METHODS AND APPLICATIONS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Kateřina Švihálková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.

BRNO 2016

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav automatizace a informatiky
Studentka: **Bc. Kateřina Švihálková**
Studijní program: Strojní inženýrství
Studijní obor: Aplikovaná informatika a řízení
Vedoucí práce: **doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.**
Akademický rok: 2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Stabilizace chaosu: metody a aplikace

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce bude stručně pojednávat o tzv. deterministickém chaosu, uvede jeho často studované formy i aparát popisu a analýzy těchto systémů (bifurkační diagramy, Ljapunovská stabilita). Práce se dále zaměří na metody stabilizace deterministického chaosu. K optimalizaci parametrů stabilizujících sekvencí může být využito jak metod umělé inteligence, tak klasických metod matematického programování.

Cíle diplomové práce:

- Motivační úvod (deterministický chaos).
- Stručná rešerše běžně studovaných modelů chaotických systémů, jejich popis a význam.
- Popis metod a principu stabilizace chaosu (OGY, TDAS, ETDAS, aj.).
- Stabilizace zvoleného modelového chaotického systému (simulace).
- Stabilizace zvoleného reálného chaotického systému (simulace, např. dvojité kyvadlo).
- Diskuze k dosaženým výsledkům.

Seznam literatury:

Pyragas, K. (1995): Control of Chaos via extended delay feedback, Physics Letters A, Elsevier Science, vol. 206, pp. 323-330

Scholl, E., Schuster, H.G. (2008): Handbook of Chaos Control (second edition), Wiley-VCH, Germany, ISBN: 978-3-572-40605-0

Kratochvíl, C., Heriban, P. (2010): Dynamické systémy a chaos, VUT v Brně

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

Ing. Jan Roupec, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá stabilizací vybraných systémů deterministického chaosu s použitím heuristických a metaheuristických metod. Diskutovaná je parametrizace zvolených optimalizačních metod, kterými jsou genetické algoritmy, simulované žíhání a pattern search. Dále jsou představeny vhodné řídicí metody a definice kritériální funkce.

V teoretické části práce jsou nejdříve stručně vysvětleny základní pojmy z teorie deterministického chaosu. Větší část je pak věnována běžně studovaným chaotickým systémům a zároveň popisu nepoužívanějších metod řízení deterministického chaosu, konkrétně OGY a Pyragasově metodě.

Praktická část je rozdělena do dvou kapitol. První z nich se zabývá stabilizací umělých chaotických systémů pomocí metod zpožděné vazby (Pyragasovy metody) - TDAS i modifikované verze ETDAS. Druhá kapitola je ukázkou řízení reálného chaotického systému, kterým je Duffingův oscilátor.

KLÍČOVÁ SLOVA

Deterministický chaos, Logistické zobrazení, Hénonova mapa, Pyragasova metoda, Duffingův oscilátor

ABSTRACT

The diploma thesis is focused on the use of heuristic and metaheuristic methods to stabilization and controlling the selected systems distinguished by the deterministic chaos behavior. There are discussed parameterization of chosen optimization methods, which are the genetic algorithm, simulated annealing and pattern search. The thesis also introduced the suitable controlling methods and the definition of the objective function.

In the theoretical part of the thesis there is a brief introduction to the deterministic chaos theory. The next chapters describes the most common and deployed methods in the control theory, especially OGY and Pyragas methods.

The practical part of the thesis is divided into two chapters. The first one describes the stabilization of the artificial chaotic systems with the time delayed Pyragas method - TDAS and its modification ETDAS. The second chapter shows the real chaotic system control. The Duffing oscillator system was chosen to serve this purpose.

KEYWORDS

Deterministic chaos, Logistic map, Hénon map, Pyragas method, Duffing oscillator

ŠVIHÁLKOVÁ, Kateřina *Stabilizace chaosu: metody a aplikace*: diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, , Fakulta strojního inženýrství, 2016. 67 s. Vedoucí práce byl doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Stabilizace chaosu: metody a aplikace“ jsem vypracoval(a) samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor(ka) uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil(a) autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl(a) nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom(a) následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autora(-ky)

Poděkování

V první řadě bych ráda poděkovala doc. Ing. Radomilu Matouškovi, Ph.D. vedoucímu mé diplomové práce za odborné vedení, ochotu a cenné rady. Díky jeho znalostem a dovednostem mi byl vždy vzorem a oporou. Dále děkuji Ing. Petru Šoustkovi, Bc. Ladislavu Dobrovskému a Bc. Michalu Bilému za korekturu a neocenitelnou pomoc při psaní práce. Nakonec bych ráda poděkovala rodině a spolužákům z fyzikálního inženýrství za psychickou podporu a motivaci během celého studia.

OBSAH

Úvod	8
1 Deterministický chaos	9
1.1 Historický úvod	9
1.2 Nelineární dynamické systémy	13
1.3 Deterministický chaos	14
1.4 Aplikace deterministického chaosu	16
2 Vybrané modely chaotických systémů	17
2.1 Logistické zobrazení (Logistic map)	17
2.2 Lorenzův atraktor (Lorenz attractor)	20
2.3 Hénonova mapa (Hénon map)	22
2.4 Rösslerův atraktor (Rössler attractor)	25
2.5 Dvojitě kyvadlo (Double pendulum)	28
3 Stabilizační metody	31
3.1 OGY metoda	31
3.2 Pyragasova metoda (Metoda zpožděné vazby)	33
4 Stabilizace modelového systému	35
4.1 Stabilizace logistického zobrazení	36
4.2 Stabilizace Hénonovy mapy	46
5 Duffingův oscilátor	54
6 Závěr	60
Literatura	63

ÚVOD

Představa, že malé příčiny mohou mít někdy velký následek, byla historiky zaznamenávána již od starověku. Základy moderní teorie chaosu položil J. C. Maxwell, na kterého navázal H. Poincaré objevením citlivostní závislosti na počáteční podmínky. Velkým přínosem bylo sestrojení nelineárního oscilátoru popsaného jednoduchou diferenciální rovnicí, protože do té doby teorie dynamických systémů nebyla plně schopná detailnějšího popisu nelineárních systémů.

Velký vliv na celkový rozvoj teorie chaosu mělo sestrojení prvního elektronového počítače, díky němuž E. Lorenz, v podstatě náhodou, objevil chaotické chování i v nejjednodušších systémech a simulačně potvrdil citlivostní závislost na počáteční podmínky těchto systémů. Tento jev se stal známým pod pojmem "efekt motýlích křídel" a vyvolal značný zájem o celkovou problematiku teorie chaotických systémů. Zprvu to byly pouze fyzikální interpretace, ale postupem času se teorie chaosu rozšířila do velké škály vědních oborů.

Předložená práce je rozdělena do pěti kapitol. První tři kapitoly reprezentují řešeršní a teoretickou část, následné dvě kapitoly představují praktickou část.

První kapitola se zabývá teoretickým popisem deterministického chaosu a stručným úvodem do jinak rozsáhlé teorie nelineárních systémů. Na závěr kapitoly jsou uvedeny nejčastější aplikace deterministického chaosu. V druhé kapitole jsou podrobněji popsány nejznámější modely chaotických systémů a jejich význam. Poslední teoretická kapitola se věnuje nejčastějším metodám stabilizace chaotických systémů, a to OGY a Pyragasově metodě. Je zde také uvedena implementace diskutovaných metod.

Čtvrtá, prakticky zaměřená kapitola, zahrnuje stručný popis zvolených optimalizačních metod a představuje volbu kritériální funkce. Dále jsou zde uvedeny vybrané chaotické systémy, na kterých jsou realizovány experimenty v kontextu stabilizace, konkrétně jde o logistické zobrazení a Hénonovu mapu. Výsledky pro jednotlivé stabilizační formule jsou uvedeny v tabulkách a na závěr každé části srovnány. Součástí je rovněž diskuze k vybraným parametrům optimalizačních technik. Závěr práce je doplněn příkladem reálného chaotického systému, kterým je Duffingův nelineární oscilátor.

1 DETERMINISTICKÝ CHAOS

Pojem chaos původem pochází z řecké mytologie a znamená nekonečný prázdný prostor, který existoval před zformováním času a prostoru. V dnešní době chápeme chaos jako projev neuspořádanosti a nepravidelnosti. Reálné systémy, jejichž časový vývoj je dán určitými zákonitostmi, lze označit za deterministické. Teorie Deterministického chaosu, která je používána k popisu nelineárních dynamických systémů, pak vnáší nový pohled na všechny přírodní jevy a struktury.

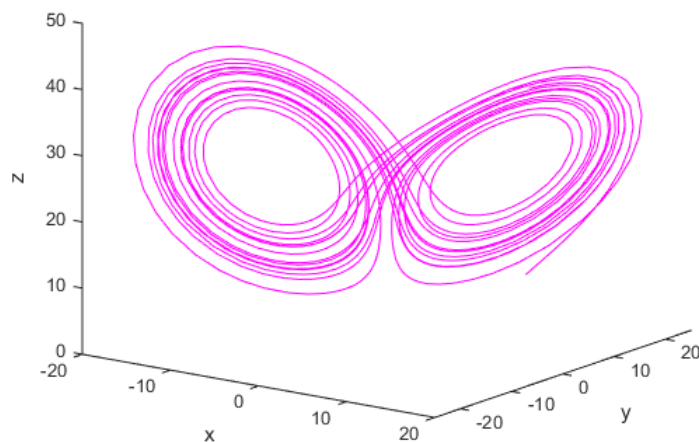
1.1 Historický úvod

Základy teorie chaosu spadají až do roku 1900 a položil je Henri Poincaré ve své studii věnované tématu nelineárních diferenciálních rovnic. Této problematice se také věnovali B. Van der Pol, A.A. Andronov, N.M. Krylov a N.N. Bogolyubov.

K vývoji teorie chaosu přispělo významně sestrojení elektronického počítače a fakt, že chování určitých systémů nebylo možné vysvětlit pomocí lineární teorie.

První úspěšný experiment provedl v roce 1960 meteorolog Edward Lorenz [19], který se zabýval předpovědí vývoje počasí. Zjistil, že jen při malé změně počátečních podmínek dostane velice odlišný výsledný model. Tento jev se stal známým pod pojmem efekt "motýlích křídel". Lorenz svůj původní model dvanácti rovnic vynucené konvekce v atmosféře zjednodušil pouze na model tří rovnic 1.1, na kterém prováděl další experimenty. V roce 1963 publikoval překvapivé výsledky své práce, ve kterých ukázal, že chování systému je periodické a jeho zobrazením jsou dvojité spirály, které se nikdy neopakují a směřují do jednoho bodu. Toto zobrazení nazval Lorenzův atraktor, jenž je zobrazen na obr. 1.1 pro nastavení $a = 10$, $b = 8/3$ a $r = 28$.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + ay \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}\tag{1.1}$$



Obr. 1.1: Lorenzův atraktor

Další výzkum probíhal v oblasti biologie, ve které se Robert May [9] zabýval předpovědí růstu populace danou jednoduchou rovnicí:

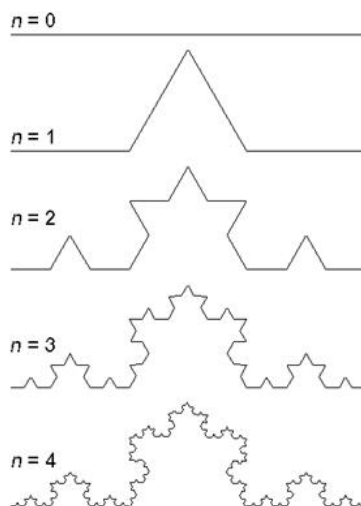
$$\textit{následující populace} = r \cdot \textit{nynější populace} \cdot (1 - \textit{následující populace}), \quad (1.2)$$

kde r je parametr růstu, u něhož zkoumal vliv na vývoj populace. Při zvyšování parametru se populační linie opakovaně větvila a vykazovala chaotické chování. Body, ve kterých dochází k větvení se nazývají bifurkační a celé zobrazení pak bifurkační diagram. Z diagramu bylo také vidět, že se v něm ukrývají přesné kopie jeho celku. Tato soběpodobnost byla dalším důležitým poznatkem výzkumu chaotických systémů.

Soběpodobností se hlouběji zabýval Benoit Mandelbrot [2], který ji podrobně zkoumal při měření délky pobřeží. Došel k závěru, že při změně měřítka se charakter pobřeží nemění a našel souvislost ve vztahu mezi délkou a měřítkem. Mandelbrot byl první, kdo definoval pojem fraktál jako útvar, u kterého je jeho tvar nezávislý na měřítku a spolu s dalšími matematikami našel silný nástroj pro jeho popis - fraktální geometrii [4]. Fraktální geometrie usnadňuje celkové chápání chování chaotických systémů. Pro popsání těchto systémů by bylo velmi neefektivní použít euklidovskou geometrii, kterou nelze popsat složitě strukturované objekty jednoduchým způsobem. Složitost fraktálu, respektive rychlost s jakou délka objektu roste do nekonečna, udává fraktální dimenze nebo též Hausdorffova dimenze [3], která nemusí být celočíselná a je větší než topologická dimenze.

Na obrázku 1.2 je zobrazena konstrukce Kochovy křivky [5], která vznikne opa-

kováním jednoduchých kroků patrných z obrázku. Zajímavostí je, že po přidání trojúhelníku se délka křivky zvětšuje, nicméně vnitřní plocha Kochovy křivky zůstává menší než plocha kruhu obkresleného okolo původního trojúhelníku. Kochova křivka nebo též Kochova vločka byla jedna z prvních popsaných fraktálů.



Obr. 1.2: Konstrukce Kochovy křivky [8]

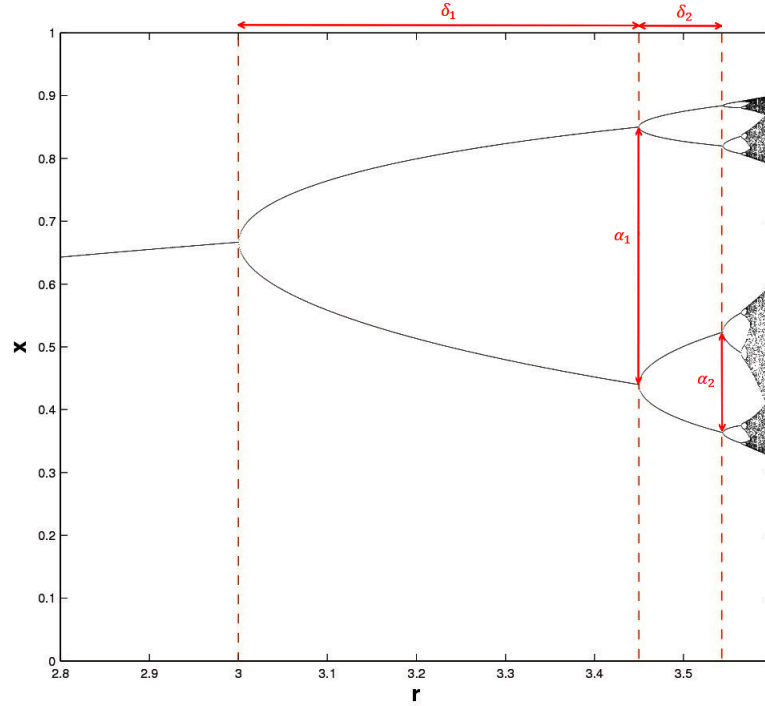
Níže je zobrazena ukázka běžně se vyskytujících fraktálů v přírodě.



Obr. 1.3: Fraktály v přírodě [6]

V roce 1975 se matematik Mitchell Feigenbauman [7] začal zabývat znovu studiem bifurkačního diagramu, přesněji toho, jak rychle k bifurkaci dochází. Objevil dvě konstanty, které ukazují souvislost většiny jednodimenzionálních bifurkač-

ních diagramů. První konstanta δ vyjadřuje poměr vzdáleností po sobě jdoucích bifurkací a druhá konstanta α poměr šířky mezi dvěma bifurkačními body. Podle těchto konstant lze určit, kdy systém začne vykazovat chaotické chování. Na obrázku 1.4 je zobrazeno určení parametrů pro výpočet Feigenbaumanových konstant pro logistické zobrazení.



Obr. 1.4: Feigenbaumanovy konstanty

Konstanty jsou poté dány vztahy:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{\delta_{k+1}} = 4.66920160910299067185320382... \quad (1.3)$$

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = 2,50290787509589282228390287... \quad (1.4)$$

Získané revoluční poznatky vedly k velkému zájmu o další výzkum teorie chaosu napříč všemi vědními obory. Vznikly dokonce aplikace i mimo vědecké obory, a to například vytvořením hudby pomocí fraktálů. Mnoho vědců se domnívalo, že dvacáté století bude definované třemi teoriemi: relativitou, kvantovou mechanikou a chaosem. Teorie chaosu změnila směr vývoje vědy a stala se její nedílnou součástí.

1.2 Nelineární dynamické systémy

Pro celkové pochopení problematiky teorie chaosu je nezbytné nejprve vysvětlit některé pojmy z teorie dynamických systémů, jež jsou čerpány z [1].

Dynamický systém je charakterizován pomocí konečné množiny stavových proměnných, přičemž vývoj systému je určen jeho okamžitým stavem. V daném čase lze hodnoty stavových proměnných znázornit bodem ve fázovém prostoru. Model dynamického systému je dán soustavou diferenciálních rovnic:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad (1.5)$$

kde \mathbf{x} je vektor stavových proměnných ve fázovém prostoru, t je čas a \mathbf{F} je vektorová funkce. Znázornění vývoje systému pomocí parametrické křivky v n -rozměrném prostoru nazýváme trajektorií systému a body, ke kterým se trajektorie blíží pak limitní body. Trajektorie, které jsou uzavřené, se nazývají orbity.

Dynamické systémy lze dělit dle několika hledisek. Jednou z možností je dělení systémů na lineární a nelineární, přičemž z hlediska teorie chaosu se budeme dále zabývat pouze nelineárními systémy, protože lineární systémy je možné jednoznačně vyřešit. V nelineárních systémech neplatí princip superpozice, a tedy pro výpočet změny stavu systému je nutné řešit diferenciální nebo diferenční rovnice. V některých případech je možné výpočet zjednodušit linearizací v určitém rozsahu hodnot. Nelineární dynamické systémy mají úzký vztah k deterministickému chaosu, protože z nelineárních závislostí nebo vazeb plyne chaotické chování systému. Dynamické systémy, které vykazují chaotické chování, lze klasifikovat následovně:

- disipativní systémy - atraktory, bifurkační diagramy
- konzervativní systémy - klasické a kvantové systémy

Dále je možné dynamické systémy dělit na spojité a diskrétní, přičemž mezi nimi existuje transformace. Spojité systémy mohou být popsány soustavou diferenciálních rovnic, zatímco diskrétní systémy jsou popsány diferenčními rovnicemi, které popisují vývoj systému v závislosti na čase. K analýze a popisu systémů jsou v praxi často používána chaotická mapování, která mohou být v diskrétní, nebo spojité časové oblasti. Diskrétní mapování je obvykle ve formě iterativní funkce, která je například

pro logistickou mapu ve tvaru 1.6 :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1.6)$$

Příklady chaotického mapování:

- 1D zobrazení
 - logistické zobrazení (diskrétní)[9]
 - Van der Polův oscilátor (spojité)[10]
- 2D zobrazení
 - Hénonova mapa (diskrétní)[29]
 - Loziho zobrazení (diskrétní)[14]
- 3D zobrazení
 - Chuův obvod (spojité)[15]
 - Lorenzův atraktor (spojité)[19]

1.3 Deterministický chaos

Teorie chaosu popisuje chování dynamických systémů velmi citlivých na počáteční podmínky a je součástí mnoha vědních oblastí matematiky a fyziky. Spolu s fraktální geometrií zasahuje do většiny vědních oborů. Protože vývoj dynamických systémů v čase je dán počátečními podmínkami, lze jejich chování označit za deterministické. Robert L. Devaney [12] formuloval klasifikaci dynamického systému jako chaotický, pokud splňuje následující podmínky:

- citlivost na počáteční podmínky
- topologickou tranzitivnost
- hustou množinu periodických orbitů

Citlivá závislost na počáteční podmínky znamená, že se dvě blízké trajektorie s rostoucím čase vzdalují, nejčastěji exponenciálně. A tedy malé změny v počáteční konfiguraci mohou vést k naprosto odlišným výsledkům. Tuto citlivostní závislost je možné v čase kvantifikovat pomocí níže uvedené rovnice:

$$||\delta x(t)|| \approx e^{\gamma t} ||\delta x_0||, \quad (1.7)$$

kde γ je Ljapunův exponent [11] vyjadřující rozbíhavost blízkých trajektorií. Míra rozbíhavosti může být různá pro různé orientace počátečního separačního vektoru a tedy existuje celé spektrum Ljapunových exponentů, jejichž počet je dán dimenzí systému, respektive jeden pro každou dimenzi. Pro vyšetření chaotického chování systému se používá největší z exponentů. Kladnost Ljapunova exponentu značí chaotické chování systému při zvolené počáteční konfiguraci, blízké trajektorie divergují.

Pokud je exponent záporný, blízké trajektorie konvergují a dynamický systém není citlivý na počáteční podmínky. Numerický výpočet Ljapunova exponentu je obtížný, ale jeho znalost je silným nástrojem při popisu dynamického systému.

Topologická tranzitivita vyjadřuje, že systém se vyvine v průběhu času tak, že jakákoliv oblast nebo otevřená množina jeho fázového prostoru se nakonec překryje s jakoukoliv jinou danou oblastí.

Atraktory

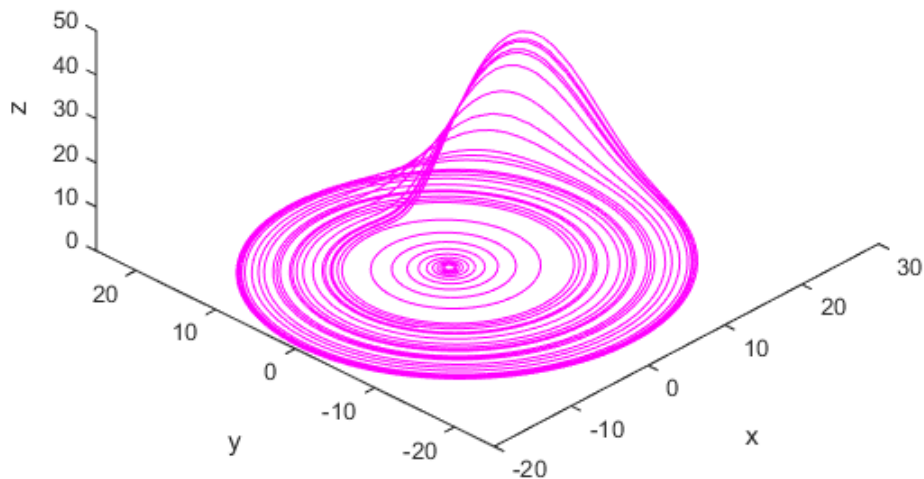
Jedním z možných způsobů znázornění vývoje chaotického systému nebo libovolného typu systému, je vytvoření fázového prostoru, kde jednotlivé rozměry reprezentují dimenzi systému. Vývojem chaotického systému vznikne ve fázovém prostoru trajektorie pohybu při pevných hodnotách řídicích parametrů. Atraktor [13] je množina bodů neboli konečný stav, do kterého systém směřuje.

Typy atraktorů:

- pevné body
- periodické a kvaziperiodické body
- chaotický atraktor
- podivný atraktor

V teorii chasu je nejdůležitějším typem podivný atraktor, který byl poprvé zaveden Edwardem Lorenzem [19] v roce 1963. U spojitých systémů je vznik podivného atraktoru omezen na tři a více dimenzí, ale pro diskrétní systémy žádná omezení nejsou. Lorenzův atraktor byl první podivný atraktor, ale existuje i mnoho dalších, jako například Rösslerův atraktor [34] a Hénonův atraktor [29]. Podivné atraktory spolu s Juliovými množinami mají fraktální strukturu. Rösslerův atraktor je zobrazen na obr. 1.5 pro nastavení $a = 0, 1$, $b = 0, 1$ a $c = 10$.

Popis dynamického systému pomocí trajektorií je málo vypovídající, proto se pro větší názornost vytvoří řez fázového prostoru a jednou nadrovinou, z trajektorie jsou potom zobrazeny pouze body. Toto zobrazení se nazývá Poincarého mapa [33].



Obr. 1.5: Rösslerův atraktor

Bifurkační diagram

Dalším důležitým způsobem vizualizace je Bifurkační diagram, který přináší dobrý obraz o možném chování systému. Při tomto způsobu zobrazení vývoje dynamického systému se mění stav systému v závislosti na některém z řídicích parametrů. Z diagramu lze dobře určit, při jakých hodnotách dochází k velkým změnám vnitřního stavu systému, například k turbulentním nebo k fázovému přechodu látky. V této nestabilitě systému dochází k štěpení topologické struktury, tedy k bifurkacím.

1.4 Aplikace deterministického chaosu

Chaotické chování vykazuje velká množina nelineárních systémů a to i takových, které se zdají být na první pohled velmi triviální. Níže jsou uvedeny příklady aplikací deterministického chaosu, které jsou v současnosti běžně studovány. Podrobnější popis aplikací je k dispozici v [17].

Příklady aplikace deterministického chaosu v praxi:

- Kryptografie - digitální vodotisk, šifrování obrazu.
- Informatika - počítačová grafika, fraktálová komprese obrazu.
- Komunikační systémy - modulace chaotického signálu a maskování.
- Elektrotechnika - elektronické obvody - Čhuův obvod.
- Fyzika - zdokonalení laserů, řízení plazmatu.

Dále také v oblasti chemie, biologie, ekonomiky, meteorologie a dalších.

2 VYBRANÉ MODELY CHAOTICKÝCH SYSTÉMŮ

Tato kapitola bude pojednávat o běžně studovaných modelech chaotických systémů. Systémů, které vykazují chaotické chování, jak umělých nebo reálných, je celá řada, a proto budou níže popsány pouze následující vybrané modely:

- logistické zobrazení
- Lorenzův atraktor
- Hénonova mapa
- Rösslerův atraktor
- Dvojitě kyvadlo

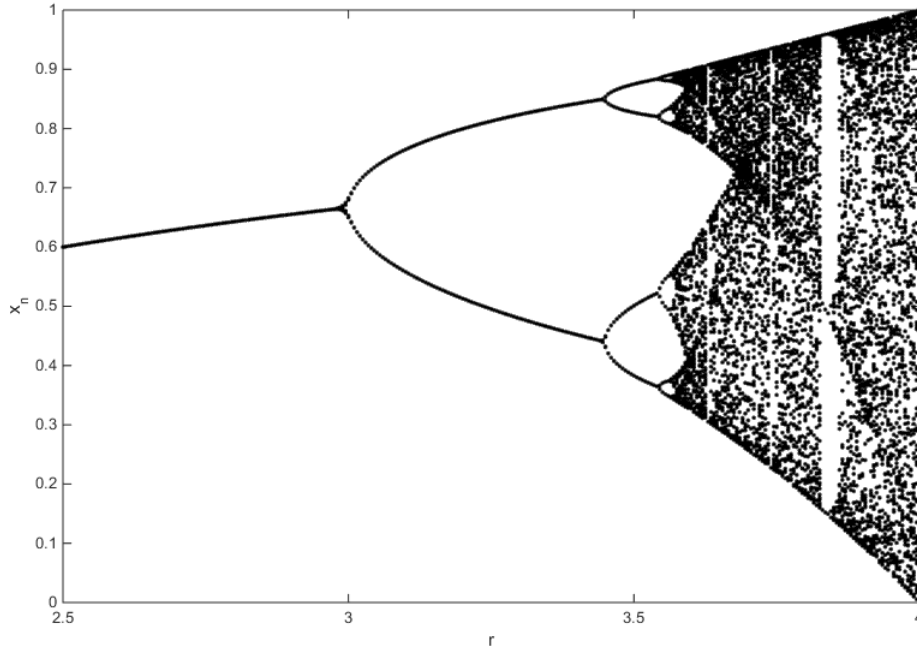
2.1 Logistické zobrazení (Logistic map)

Logistické zobrazení zpopularizoval biolog Robert May článkem *Simple mathematical models with very complicated dynamic* [9] v roce 1976 jako demografický model v diskrétní časové oblasti analogický k logistické rovnici vytvořené Pierrem Francois Verhulstem [16]. Je to jeden z nejznámějších a nejčastěji používaných příkladů polynomiálního mapování druhého stupně. Logistické zobrazení je popsáno diferenční rovnicí 2.1 a je důkazem toho, že i systémy s velmi jednoduchou nelineární dynamickou rovnicí mohou vykazovat chaotické chování.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.1)$$

kde x_n je číslo mezi jedničkou a nulou a reprezentuje poměr existující populace k maximální možné populaci a r je koeficient populačního růstu, který nabývá hodnot z intervalu $(0, 4)$. Pokud je koeficient populačního růstu příliš nízký, populace vymře. Vysoká hodnota koeficientu může vést ke stabilní hodnotě, ale také k celé řadě možných výsledků pro stejné počáteční podmínky.

Pro svou jednoduchost a značnou citlivost na počáteční podmínky je logistické zobrazení široce používaným nástrojem k pochopení chování chaotických systémů. Logistické zobrazení vykazuje chaotické chování pro většinu hodnot r v rozsahu od 3.57 do 4, což je patrné i z bifurkačního diagramu, který je zobrazen na obrázku ???. Nepřesná znalost počátečních podmínek a také vlastnost opakovaného stahování a roztahování atraktoru [26] značně zhoršuje předvídatelnost budoucího vývoje systému. Tato vlastnost byla využita k sestrojení pseudo generátoru náhodných čísel pomocí logistického zobrazení [18]. I když neznáme přesně budoucí stav systému, je možné určit míru pravděpodobnosti tohoto stavu. Pokud $r = 4$ a počáteční podmínky leží v intervalu $(0, 1)$, tak míra pravděpodobnosti odpovídá beta rozložení



Obr. 2.1: Bifurkační diagram logistického zobrazení

s parametry $a = 0,5$ a $b = 0,5$. Tedy i když víme jen málo o počátečních podmínkách, jsme stále schopni něco říci o budoucím stavu systému. Jak bylo uvedeno výše, citlivost na počáteční podmínky je možné kvantifikovat pomocí Ljapunova exponentu pro počáteční podmínku x_0 a blízký bod $x_0 + \delta_0$. Při využití vztahu 2.2 lze největší Ljapunův exponent pro zobrazení v diskrétní časové oblasti vypočítat ze vztahu 2.3. Výpočet i následné odvození byly převzaty z [24]

$$\Delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0) \quad (2.2)$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right] \quad (2.3)$$

Pro logistické zobrazení:

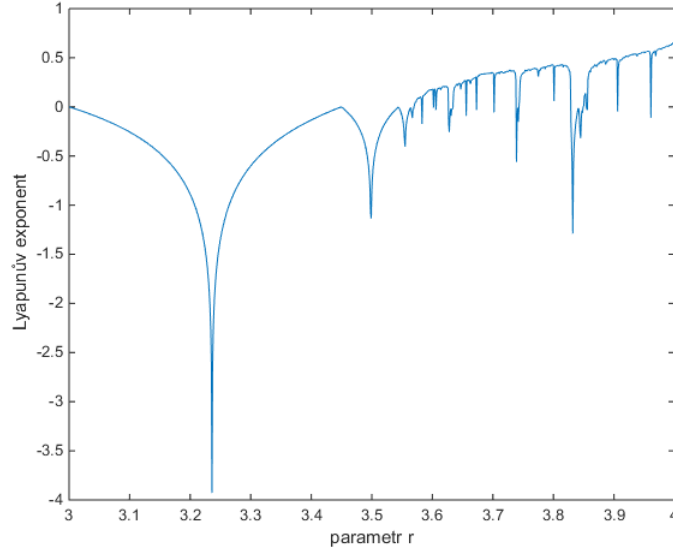
$$f'(x) = r - 2rx \quad (2.4)$$

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r - 2rx_i| \right] \quad (2.5)$$

Hodnota Ljapunova exponentu λ konverguje po tisíci iteracích:

$$\lambda(x) = \frac{1}{1000} \sum_{i=0}^{1000-1} \ln |r - 2rx_i| \quad (2.6)$$

Na obrázku 2.2 je zobrazeno spektrum Ljapunova exponentu pro logistické zobrazení pro $3 < r < 4$. Hodnota koeficientu je záporná pro $r < r^* \approx 3,57$. Z grafu je patrné periodické chování pro kladné λ a špičky, které nabývají záporných hodnot, odpovídají cyklům.



Obr. 2.2: Ljapunův exponent pro 10000 iterací

Logistické zobrazení se vyskytuje v několika variantách. Příkladem může být nastavení $r = 2$, je známé jako tent map, které je dané rovnicí 2.7.

$$x_{n+1} = \begin{cases} rx_n, & \text{pro } x_n < \frac{1}{2} \\ r(1 - x_n), & \text{pro } x_n \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.7)$$

Název je zřejmý z grafu jeho funkce, který je zobrazen na obrázku 2.3.

Rovnici logistického zobrazení lze také vyjádřit ve spojitě časové oblasti:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x) \quad (2.8)$$

Po aplikaci Eulerovy metody pro diferenciální rovnice lze přejít od spojitě časové oblasti k diskrétní:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) \quad (2.9)$$

$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n)\Delta t \quad (2.10)$$

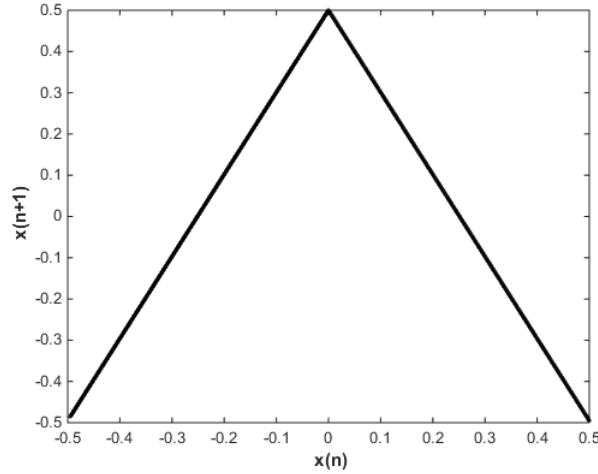
$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n)\Delta t \quad (2.11)$$

$$x_{n+1} = x_n + x_n(1 - x_n)\Delta t = x_n(1 + \Delta t - x_n\Delta t) \quad (2.12)$$

Jestliže definujeme $y_n = \frac{\Delta t}{1+\Delta t}x_n$ a $r = 1 + \Delta t$, pak

$$y_{n+1} = \frac{\Delta t}{1 + \Delta t}x_n(1 + \Delta t - x_n\Delta t) = y_n(r - ry_n) = ry_n(1 - y_n), \quad (2.13)$$

což je rovnice pro logistické zobrazení v diskrétní časové oblasti.



Obr. 2.3: Tent map

2.2 Lorenzův atraktor (Lorenz attractor)

Lorenzův atraktor je jeden z nejslavnějších chaotických systémů popsaných diferenciálními rovnicemi 1.1, které byly publikovány v roce 1963 E. Lorenzem [19]. Tento vědec se významně zasloužil o rozvoj moderní teorie chaosu. Velké množství chaotických systémů bylo vyvinuto na základě originálního Lorenzova modelu [21], [22] a [23]. Lorenzův systém má několik vlastností:

- je autonomní, což znamená, že čas se explicitně nevyskytuje na pravých stranách rovnic
- rovnice zahrnují první časové derivace, tedy vývoj systému závisí pouze na hodnotách x , y a z v daném čase
- je nelineární
- systém je disipativní pokud je splněna následující nerovnost

$$\nabla f = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - 1 - b < 0 \quad (2.14)$$

Parametry a a b jsou fyzikální charakteristiky proudění vzduchu, které jsou kladné. Tedy nerovnost je vždy splněna, a proto jsou řešení ohraničené.

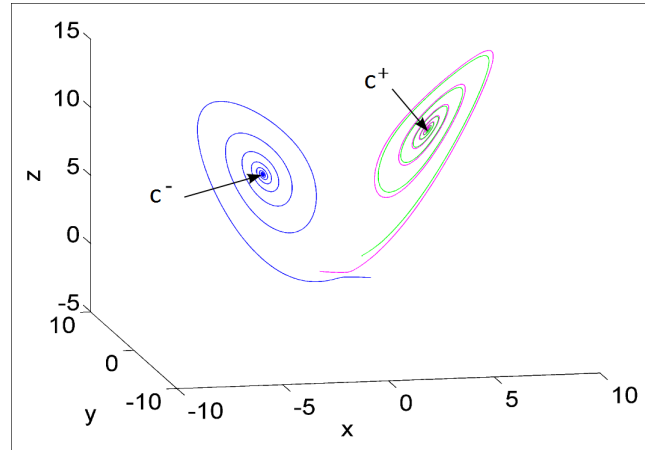
- systém je symetrický podle osy z - je invariantní vůči transformaci souřadnic.

Lorenzův systém má tři limitní body, které jsou patrné i z obrázku 1.1. První z nich je v počátku souřadného systému a další dva jsou závislé na počátečním nastavení systému a existují pouze pro $r > 1$. Limitní body je možné vypočítat z rovnic 2.15 a 2.16. Systém se chová velmi odlišně pro $r \leq 1$ a $r > 1$. Po dosažení hodnoty parametru $r = 1$ dochází k bifurkaci, tedy ke kvalitativním změnám chování systému.

$$c^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (2.15)$$

$$c^- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (2.16)$$

Na obrázku 2.4 jsou vyobrazeny limitní body Lorenzova atraktoru.



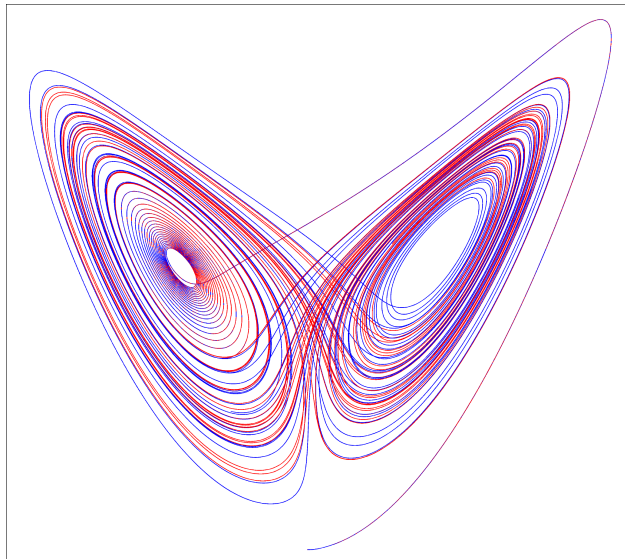
Obr. 2.4: Lorenzův systém pro $r = 10$. Barvy znázorňují různé počáteční podmínky, systém není chaotický. [20]

Systém má ještě další bifurkaci, a to pro $r \approx 24,74$, limitní body se nemění, ale mění se jejich vliv na trajektorie. Pro $r > 24,74$ se trajektorie odpuzují od limitních bodů a blíží se k limitní množině.

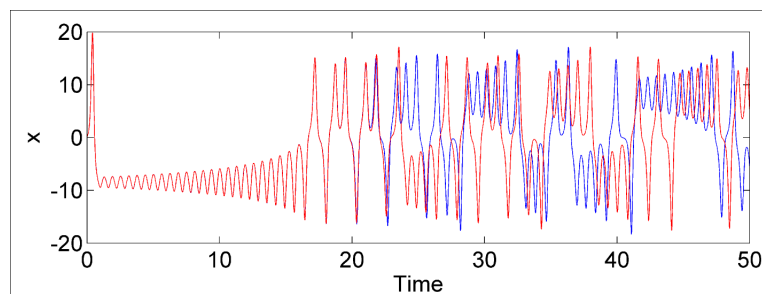
Na obrázku 2.5 je zobrazen Lorenzův systém pro $r > 24,74$. Odlišné barvy trajektorií rozlišují dvě téměř identická počáteční nastavení. Systém je citlivý na počáteční podmínky - trajektorie jsou od sebe velmi vzdáleny. Aby tato citlivostní závislost byla lépe patrná, na obrázku 2.6 je vyobrazena změna hodnoty x v čase.

Při zkoumání dlouhodobého vývoje trajektorií Lorenzova atraktoru se zjistilo, že každý bod ve fázovém prostoru odpovídá jednomu jedinečnému řešení, tedy žádná

trajektorie nemůže protnout sama sebe. Stejně tak se nemohou protnout ani jakékoliv dvě trajektorie. Lorenzův atraktor je příkladem podivného atraktoru, který se také vyznačuje tím, že je aperiodický.



Obr. 2.5: Lorenzův systém pro $r > 24,74$. Barvy rozlišují různé počáteční podmínky: modrá - $(0;1,01;0)$ a červená - $(0;1,01;0)$, systém je chaotický. [20]



Obr. 2.6: Hodnota x pro dvě různé počáteční podmínky. [20]

2.3 Hénonova mapa (Hénon map)

Hénonova mapa je dalším příkladem dvoudimenzionálního dynamického systému v diskrétní časové oblasti, který vykazuje chaotické chování. M. Hénon, inspirován Lorenzovým modelem, zavedl v roce 1976 [29] jednoduché zobrazení, které zachycuje roztahování a skládání trajektorie ve fázovém prostoru a vede k deterministickému chaosu. Jednoduchá forma Hénonovy mapy poskytuje další možnosti de-

tailního zkoumání chaotických systémů. I když bylo zobrazení zavedené pouze jako matematický model, stále odpovídá fyzikálnímu systému, který byl například dán J. F. Heagym v [30].

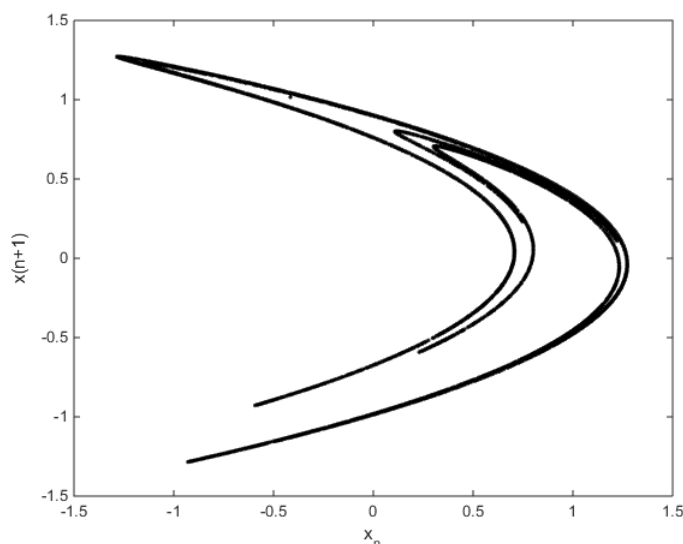
Hénonova mapa je dána dvěma diferenčními rovnicemi:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n,\end{aligned}\tag{2.17}$$

kde a a b jsou nenulové bifurkační parametry, pokud $a = 0$, systém se redukuje na jednodimenzionální logistickou rovnici. Druhá rovnice může být vyjádřena jako $y_n = x_{n-1}$, pak Hénonovu mapu lze přepsat do jedné rekurentní rovnice:

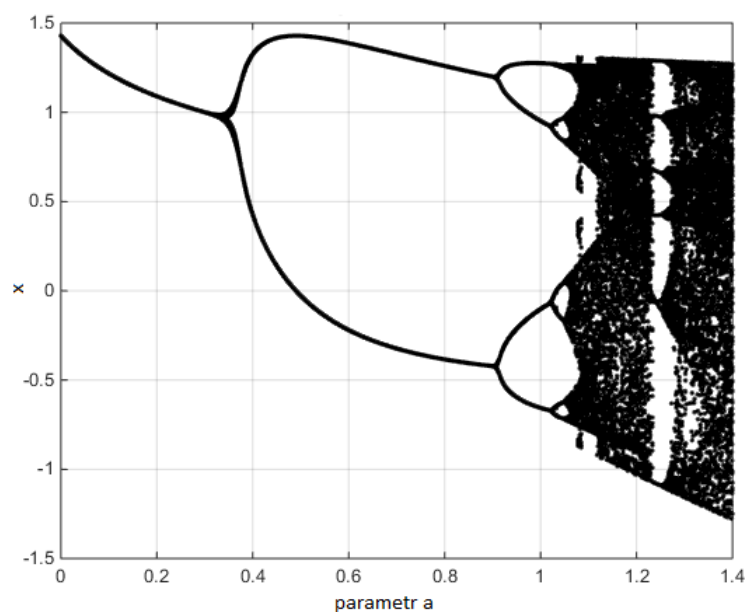
$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1}\tag{2.18}$$

Na obrázku 2.7 je zobrazen Hénonův atraktor.



Obr. 2.7: Hénonův atraktor pro nastavení $a = 1,4$, $b = 0,3$ a počáteční bod $(0,1; 0,1)$.

Po analýze zobrazení definoval M. Hénon [29] čtyřúhelník, ve kterém zůstávají všechny body zobrazení. Postupným iterováním je čtyřúhelník roztahován a stahován Hénonovou mapou dokud není získán atraktor. Ačkoliv je poloha orbitů citlivá na počáteční podmínky, atraktor je stabilní geometrický objekt. Ke studiu vývoje dynamického systému je vhodný bifurkační diagram, který je vyobrazen na obrázku 2.8 pro různé hodnoty parametru a při $b = 0,3$ a počátečních podmínkách $x_0 = y_0 = 0$.



Obr. 2.8: Bifurkační diagram Hénonovy mapy pro nastavení $b = 0,3$ a počáteční bod $(0;0)$

Pokud je parametr a mezi 0 a 0,32, posloupnost x_n konverguje k limitnímu bodu x_f . Z bifurkačního diagramu je zřejmé, že po překročení $a = 0,32$ posloupnost konverguje k periodickým orbitům a při dalším zvětšení parametru dochází ke zdvojení periodických orbitů, dokud systém nezačne vykazovat chaotické chování.

Hénonova mapa obecně patří do skupiny funkcí definovaných:

$$H_{ab} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

kde a a b jsou kladné nenulové parametry, jak už bylo řečeno výše, zobrazení je vždy dvoudimenzionální. Celá skupina zobrazení je reprezentovaná funkcí H a po bližším prostudování je to zobecnění další skupiny funkcí daných $F_c(x) = 1 - cx^2$, kde c je konstanta. Ačkoliv se Hénonova mapa jeví jako jedna mapa, ve skutečnosti je složena ze tří odlišných transformací [32] daných H_1 , H_2 a H_3 . Transformace jsou definované pomocí:

$$H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - ax^2 + y \end{pmatrix}, H_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx \\ y \end{pmatrix}, H_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Podle definice uvedené výše dostáváme $H_{ab} = H_3 \cdot H_2 \cdot H_1$. Sestrojení paraboly, dané rovnicí $F_c(x) = 1 - cx^2$ po aplikování tří transformací, je možné následující úvahou: Předpokládejme, že $a > 1$ a začneme sestrojením elipsy s počátkem $(0,0)$.

Transformace definovaná H_1 je nelineární zakřivení(bending) v ose y . H_2 smršťuje elipsu podél osy x (faktor kontrakce je dán parametrem b), roztahuje podél osy y a roztahuje část křivky pod osou x , aby vypadala jako svislý oblouk. H_3 vytvoří osově souměrný obrazec podle osy $x = y$. Výsledný obrazec vypadá jako parabola otevřená doleva a zvětšená v oblasti vrcholu paraboly, což je velmi podobné Hénonově mapě.

Limitní body systému závisejí na parametrech a a b . Pro nalezení limitních bodů je nutné vyřešit rovnice plynoucí z 2.19. Po aplikaci několika základních substitucí nalezneme výraz pro x , který je roven:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2a} \left(b - 1 \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a} \right) \quad (2.21)$$

Pokud $a \neq 0$, systém má dva limitní body:

$$x_{0\pm} = \frac{-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \quad (2.22)$$

Z výše uvedené rovnice je možné odvodit, pro jaké hodnoty parametrů a a b chaotický pohyb vede k podivnému atraktoru. Důkaz je uveden v [31], ze kterého vyplývá:

Parametr a v závislosti na parametru b	Limitní/periodické body
$a < -\frac{1}{4}(1-b)^2$	žádné
$-\frac{1}{4}(1-b)^2 < a < \frac{3}{4}(1-b)^2$	2 limitní body
$a > \frac{3}{4}(1-b)^2$	2 periodické body

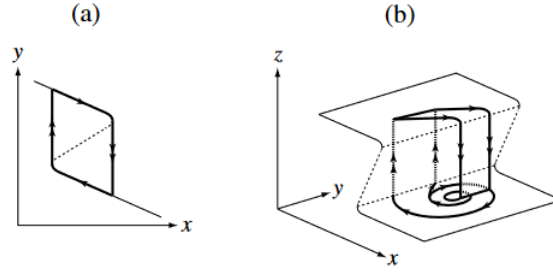
Hénonova mapa přináší nejen zajímavé skutečnosti v oblasti deterministického chaosu, ale také kvůli silným matematickým základům možnost vyvinout nové aplikace, které mají potenciál vyřešit problémy reálného světa.

2.4 Rösslerův atraktor (Rössler attractor)

Rösslerův systém byl představen v roce 1976 Ottou Rösslerem [34] jako prototyp třídimenzionálního systému ve spojitě časové oblasti. Dále také zavedl hyperchaotický čtyřdimenzionální systém, což je systém s více než jedním kladným Lyapunovým exponentem [35], [36]. O. Rössler byl inspirován geometrií zpětného proudění často reprezentovaným tvarem písmena Z. Tento princip proudění je vyobrazen na obrázku 2.9. Pohyb je pomalý, jakmile je dosaženo okraje, trajektorie přejde na druhou větev potrubí, což umožňuje periodicky ustálený pohyb i ve vyšších dimenzích.

Rösslerův systém je složen ze tří rovnic:

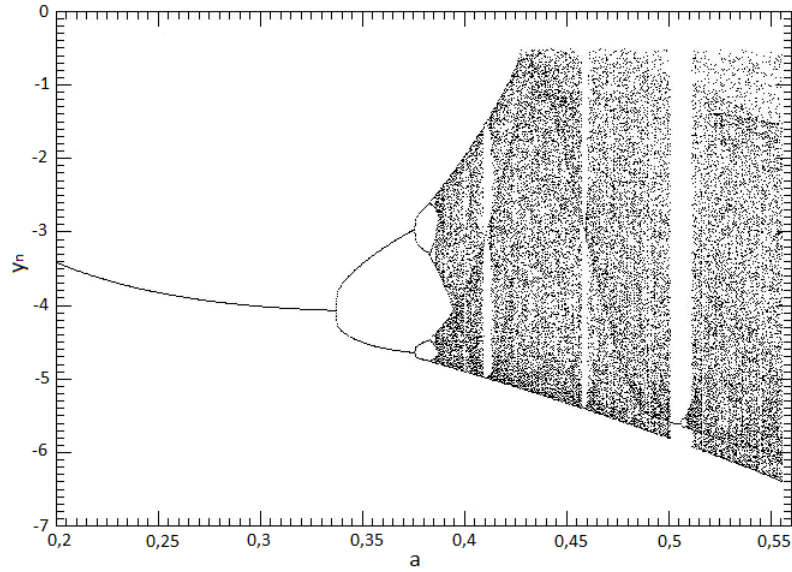
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= bx - cz + xz\end{aligned}\tag{2.23}$$



Obr. 2.9: Princip zpětného proudění (a) 2D (b) 3D. [27]

Systém rovnic obsahuje tři proměnné (x, y, z) a tři parametry (a, b, c) . První dvě rovnice jsou lineární a vytváří oscilace, které mohou být zesíleny parametrem $a > 0$, vznikne pohyb ve spirále. Třetí rovnice je nelineární a vyjadřuje zpětné proudění tekutiny na začátek spirály. V závislosti na parametrech (a, b, c) systém může vytvářet ustálený, periodický, kvaziperiodický i chaotický atraktor, přičemž mohou být vzájemně propojeny bifurkacemi. Výsledný atraktor, který je zobrazen na obr. 1.5, reprezentuje spirálovitý chaotický systém s nepravidelnou amplitudou oscilace.

Rössler studoval chaotický atraktor s nastavením parametrů $a = 0,2, b = 0,2$ a $c = 5,7$. V dnešní době se běžně používá nastavení parametrů $a = 0,1, b = 0,1$ a $c = 14$. Další kombinace parametrů jsou získány na základě topologické analýzy. Pokud je parametr a zvolen jako bifurkační parametr, který nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 126; 0, 4325 \rangle$, pak $b = 2$ a $c = 4$. Jestliže je parametr $a > 0,43295$, pak systém vede k multimodálnímu chaosu, původně nazvaný jako screw-type chaos (šroubovitý chaos). Kompletní topologický popis je uveden v [37]. Na obrázku 2.10 je vyobrazen Bifurkační diagram Rösslerova atraktoru pro různé hodnoty parametru a .



Obr. 2.10: Bifurkační diagram Rösslerova atraktoru pro nastavení $b = 2$ a $c = 4$. [28]

Rösslerův systém má dva limitní body. Jestliže rovnice soustavy 2.23 položíme rovno nule a soustavu vyřešíme, dostaneme souřadnice limitních bodů, které jsou následující:

$$(x_{\pm}, y_{\pm}, z_{\pm}) = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right) \quad (2.24)$$

Body existují pouze za podmínky, že $c^2 \geq 4ab$. První limitní bod (se záporným znaménkem) se nachází uprostřed atraktoru a je nestabilní. Druhý limitní bod je umístěn mimo oblast atraktoru a může být stabilní či nestabilní v závislosti na hodnotách parametrů.

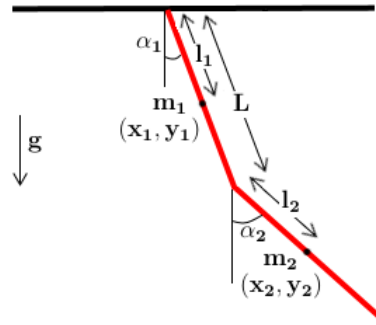
Za předpokladu, že atraktor je stabilní, lze vypočítat tři Ljapunovy exponenty λ_1, λ_2 , a λ_3 , ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$), přičemž $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 < 0$. Exponent λ_1 vyjadřuje míru roztažnosti atraktoru a exponent λ_3 míru kontrakce. Atraktor má úzké topologické domény, protože absolutní hodnota exponentu λ_3 je mnohem větší než λ_1 .

Rösslerův systém je svým chováním podobný Lorenzovu atraktoru, ale jeho kvalitativní analýza je jednodušší, protože má pouze jednu rovnici nelineární. Lineární rovnice lze jednoduše analyzovat například pomocí vlastních vektorů diagonální matice. Později bylo zjištěno, že originální teoretické rovnice Rösslerova traktoru mohou být také využity při modelování rovnováhy v chemických reakcích.

2.5 Dvojité kyvadlo (Double pendulum)

Dvojité kyvadlo je jeden z nejpoužívanějších reálných systémů, na kterém se demonstruje chaotický pohyb. Je to jednoduché zařízení, u kterého jsou počáteční podmínky snadno nastavitelné a jejich změnou dochází k velkým rozdílům výsledných trajektorií. Odchylku trajektorií lze jednoduše měřit a porovnat s numericky vypočítanými Ljapunovy exponenty. Další výhodou zařízení je jeho flexibilita. Pro velké počáteční úhly systém vykazuje chaotické chování a naopak pohyb pro malé úhly lze aproximovat na lineární. Sklopením celého systému do transversální roviny je možné studovat pohyb při nulové gravitaci.

Dvojité kyvadlo se skládá z jednoho kyvadla upevněného na druhé. Tento mechanický systém má dva stupně volnosti a čtyřrozměrný stavový prostor. Schéma dvojitého kyvadla je zobrazeno na obr. 2.11.



Obr. 2.11: Dvojité kyvadlo

Níže bude uvedena analýza [39] ideálního systému dvojitého kyvadla (bez tření). Rovnice pohybu budou popsány pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu [38]. Jako zobecněné souřadnice systému jsou použity úhly mezi začátkem obou částí kyvadla a vertikální osou, které definují konfiguraci systému. Translační kinetická energie ve středech obou částí kyvadla je dána:

$$\begin{aligned}
 T_{1,trans} &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m_1l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 \\
 T_{2,trans} &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\
 &= \frac{1}{2}m_2L^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + m_2Ll_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Rotační kinetická energie s momenty setrvačnosti I_1 a I_2 ve středech obou částí

kyvadla je:

$$\begin{aligned} T_{1,rot} &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}_1^2 \\ T_{2,rot} &= \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}_2^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Celková kinetická energie systému:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + \\ &+ m_2 L l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}_2^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Potenciální energie obou částí kyvadla je dána:

$$\begin{aligned} V_1 &= -g m_1 l_1 \cos(\alpha_1) \\ V_2 &= -g m_2 L \cos(\alpha_1) - g m_2 l_2 \cos(\alpha_2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

A celková potenciální energie systému je:

$$V = -g m_1 l_1 \cos(\alpha_1) - g m_2 L \cos(\alpha_1) - g m_2 l_2 \cos(\alpha_2) \quad (2.29)$$

Poté je Lagrangian roven:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \\ &= a_1 \dot{\alpha}_1^2 + a_2 \dot{\alpha}_2^2 + a_3 \dot{\alpha}_1^2 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + a_4 \cos(\alpha_1) + a_5 \cos(\alpha_2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

kde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m_1 l_1^2}{2} + \frac{I_1}{2} + \frac{m_2 L^2}{2} \\ a_2 &= \frac{m_2 l_2^2}{2} + \frac{I_2}{2} \\ a_3 &= m_2 L l_2 \\ a_4 &= g(m_1 l_1 + m_2 L) \\ a_5 &= g m_2 l_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pohybové rovnice systému získáme z Euler-Lagrangeovy [40] rovnice:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (2.32)$$

Pro systém dvojitého kyvadla dostaneme diferenciální rovnice druhého řádu:

$$\begin{aligned} a_4 \sin(\alpha_1) + 2a_1 \ddot{\alpha}_1 + a_3 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + a_3 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0 \\ a_5 \sin(\alpha_2) + 2a_2 \ddot{\alpha}_2 + a_3 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - a_3 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

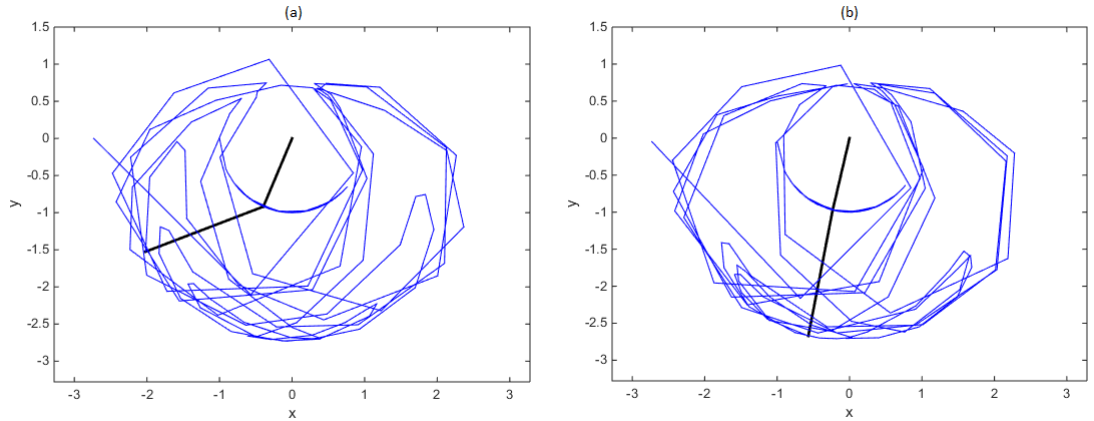
A po vyjádření druhých derivací:

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}_1 &= \frac{2a_2a_4\sin(\alpha_1) + a_3^2\dot{\alpha}_1^2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) +}{a_3^2\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) - 4a_1a_2} \\
&\quad + \frac{2a_2a_3\dot{\alpha}_2^2\sin(\alpha_1 - \alpha_2) - a_3a_5\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2)}{a_3^2\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) - 4a_1a_2} \\
\ddot{\alpha}_2 &= \frac{2a_1a_5\sin(\alpha_2) - a_3^2\dot{\alpha}_2^2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) -}{a_3^2\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) - 4a_1a_2} \\
&\quad - \frac{2a_1a_3\dot{\alpha}_1^2\sin(\alpha_1 - \alpha_2) - a_3a_4\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_2)}{a_3^2\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) - 4a_1a_2}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Tyto dvě pohybové rovnice lze vyřešit například za použití numerické integrační metody Runge-Kutta [41].

Níže je demonstrována citlivostní závislost systému na počáteční podmínky. Na obrázku 2.12 (b) je počáteční úhel α_1 zmenšen o dva stupně.

Systém dvojitého kyvadla dokazuje, že i ty nejjednodušší fyzikální modely mohou vykazovat za jistých podmínek chaotické chování. Experimentální využití je velice široké, protože dvojitě kyvadlo lze jednoduše sestavit v různých variantách, a to i pro třírozměrný prostor.



Obr. 2.12: Trajektorie dvojitého kyvadla pro velké počáteční úhly

3 STABILIZAČNÍ METODY

Hlavním cílem stabilizace obecně je dosáhnout požadovaného chování systému i při výskytu perturbací. Stabilizace chaosu je založena na myšlence využívání dynamických vlastností systému k jeho kontrole [47]. Citlivostní závislost na počáteční podmínky je použita ke stabilizaci systému v periodických orbitech. Požadovaného vývoje trajektorie, který může být stacionární, periodický nebo chaotický, lze dosáhnout vhodnou aplikací perturbací na kontrolní parametr. Vědci se tímto problémem začali zabývat na počátku devadesátých let a od té doby byl koncept řízení chaosu úspěšně použit na různé druhy systémů. Tato kapitola bude zaměřena na nejčastější metody stabilizace chaotických systémů, původně vyvinuté ve fyzikálním kontextu. Závěrem poznamenejme, že na rozdíl od běžných metod stabilizace využívaných v teorii automatického řízení, jsou tyto metody poměrně specifické.

3.1 OGY metoda

OGY metoda [42, 46] je založená na principu čekání na okamžik, kdy je trajektorie v blízkosti požadovaného limitního bodu nebo periodického orbitu a poté je aplikována malá perturbace na kontrolní parametr za účelem kontroly systému. Tento princip poprvé využili E. Ott, C. Grebogi a J. A. Yorke, po nichž je také metoda pojmenovaná. Velikost perturbace je omezená a může být aplikována pouze v úzkém okolí požadovaného stavu [46]. Použitelnost této metody byla ověřena na mnoha experimentech [48, 49]. Předpokládejme n -dimenzionální zobrazení:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, p), \quad (3.1)$$

kde $\mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^2$, \mathbf{F} je hladká funkce a $p \in \mathbf{R}$ je kontrolní parametr, jehož variace musí být malá:

$$|p - \bar{p}| < \delta, \quad (3.2)$$

kde \bar{p} je nominální hodnota parametru a $\delta \ll 1$ definuje oblast variace parametru. Cílem je nalézt takové p , aby se trajektorie systému stabilizovala po vstoupení do blízkého okolí žádaného periodického orbitu.

Nechť $\mathbf{x}_F(\bar{p})$ je jeden z limitních bodů systému 3.1 nominální hodnoty parametru \bar{p} , který chceme stabilizovat. Umístění limitního bodu ve fázovém prostoru závisí na kontrolním parametru. Po aplikaci malé perturbace Δp , dostáváme $p = \bar{p} + \Delta p$ a $\mathbf{x}_F(p)$ se blíží $\mathbf{x}_F(\bar{p})$. Můžeme psát:

$$\mathbf{x}_F(p) \approx \mathbf{x}_F(\bar{p}) + \mathbf{g}\Delta p, \quad (3.3)$$

kde vektor \mathbf{g} je dán:

$$\mathbf{g} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}_F}{\partial p} \Big|_{p=\bar{p}} \approx \frac{\mathbf{x}_F(p) - \mathbf{x}_F(\bar{p})}{\Delta p} \quad (3.4)$$

Nelineární hladkou funkci lze v malém okolí ϵ kolem limitního bodu aproximovat na lineární. Tedy v blízkosti $\mathbf{x}_F(\bar{p})$ můžeme použít lineární aproximaci pro 3.1:

$$[\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_F(p)] \approx \mathbf{M}[\mathbf{x}_F(p)] \cdot [\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_F(p)], \quad (3.5)$$

kde $\mathbf{M}[\mathbf{x}_F(p)]$ je Jacobiho matice 2×2 funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x}, p)$ spočítané v limitním bodě $\mathbf{x}_F(p)$, která je definovaná:

$$\mathbf{M}[\mathbf{x}_F(p)] = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p} \Big|_{\mathbf{x}_F(p)} \approx \mathbf{M}[\mathbf{x}_F(\bar{p})] + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \Big|_{p=\bar{p}} \Delta p. \quad (3.6)$$

Po aplikaci substituce a úpravě dostaneme:

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_F(\bar{p}) \approx \mathbf{g} \Delta p + \mathbf{M}[\mathbf{x}_F(\bar{p})] \cdot [\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_F(\bar{p}) - \mathbf{g} \Delta p]. \quad (3.7)$$

V rovnici 3.7 je Jacobiho matice vypočítána pro limitní bod $\mathbf{x}_F(\bar{p})$ neperturovaného systému, který má být stabilizovaný. Zavedeme e_s a e_u jako stabilní a nestabilní vlastní vektory diagonální matice a f_s a f_u jako jednotkové vektory, které splňují $f_s \cdot e_s = f_u \cdot e_u = 1$ a $f_s \cdot e_u = f_u \cdot e_s = 0$. Poté lze Jacobiho matici $\mathbf{M}[\mathbf{x}_F(\bar{p})]$ psát ve tvaru:

$$\mathbf{M}[\mathbf{x}_F(\bar{p})] = \lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{f}_u + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{f}_s, \quad (3.8)$$

kde λ_s a λ_u jsou stabilní a nestabilní vlastní čísla matice. Když je trajektorie bodu \mathbf{x}_n v malém okolí ϵ požadovaného limitního bodu $\mathbf{x}_F(\bar{p})$, aplikuje se parametr perturbace Δp_n v čase n , limitní bod se mírně posune a v další iteraci \mathbf{x}_{n+1} sklouzne do stabilního směru $\mathbf{x}_F(\bar{p})$. Tedy zvolíme kontrolní parametr Δp_n tak, aby platilo:

$$\mathbf{f}_u \cdot [\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_F(\bar{p})] = 0. \quad (3.9)$$

Jestliže \mathbf{x}_{n+1} sklouzne do stabilního směru $\mathbf{x}_F(\bar{p})$, pak můžeme nastavit kontrolní parametr na nulu. Pro dostatečně malé $[\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_F(\bar{p})]$, lze 3.9 dosadit do 3.7 a $\Delta p_n = c_n$:

$$c_n = \frac{\lambda_u \mathbf{f}_u \cdot [\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_F(\bar{p})]}{(\lambda_u - 1) \mathbf{f}_u \mathbf{g}} \equiv \mathbf{C}[\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_F(\bar{p})] \quad (3.10)$$

Pokud je splněna podmínka $\mathbf{f}_u \mathbf{g} \neq 0$, tak $c_n |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_F(\bar{p})|$, což je malé číslo. Nastavení parametru Δp_n závisí na velikosti hodnoty c_n :

$$\Delta p_n = \begin{cases} c_n, & \text{pro } |c_n| < \delta \\ 0, & \text{pro } |c_n| \geq \delta \end{cases} \quad (3.11)$$

Jednoduše lze proces stabilizace shrnout do následujících tří bodů:

1. Nalézt požadovaný nestabilní periodický orbit.
2. Vypočítat stabilní a nestabilní směry všech komponentů nestabilního periodického orbitu.
3. V blízkém okolí požadovaného nestabilního periodického orbitu vypočítat perturbace v každé iteraci s případnými omezeními.

Silnou stránkou OGY metody je, že nevyžaduje detailní model chaotického systému, ale pouze informace o části Poincarého mapy. Metoda je tedy velmi úspěšná při kontrole široké škály chaotických systémů [43], ale vyžaduje přesný výpočet perturbace potřebné k dosažení stability a také je vhodná pouze pro diskrétní řízení v bodech Poincarého mapy.

3.2 Pyragasova metoda (Metoda zpožděné vazby)

Tato metoda byla vyvinuta ke stabilizaci nestabilních periodických orbitů aplikací perturbace spojitě v čase na kontrolní parametr. Poprvé tuto metodu uvedl K. Pyragas článkem [44] v roce 1992. Princip řízení chaotického systému pomocí spojitě perturbace byl již dříve publikován, ale ne ve zpětné vazbě. Tyto metody nebylo možné použít k stabilizaci nestabilních periodických orbitů, pouze eliminovaly chaos v systému a výsledné periodické orbity byly odlišné než počáteční.

Pyragasova metoda je také známá jako Time Delayed Auto Synchronization (TDAS) a je jednoduchá na implementaci. Podstatou je konstrukce speciální formy perturbace spojitě v čase, která nezmění požadované nestabilní periodické orbity.

Uvažujme dynamický systém, které lze popsat obyčejnou diferenciální rovnicí:

$$\frac{dx}{dt} = P(x) + F(t), \quad (3.12)$$

kde systém P je popsán proměnnou x se vstupním buzením F , které bude nulové, jestliže na systém není aplikována vnější perturbace. Pro nestabilní periodický orbit s periodou τ , který chceme stabilizovat aplikací kontrolního parametru F , můžeme psát logickou podmínku $x(t + \tau) = x(t)$. Kontrolní parametr je poté dán rovnicí 3.13.

$$F(t) = K[x(t - \tau) - x(t)] \quad (3.13)$$

Parametr K reprezentuje míru perturbace a vhodnou volbou jeho hodnoty lze efektivně stabilizovat požadovaný nestabilní periodický orbit. Perturbace je do systému vnášena jako záporná zpětná vazba (pro $K > 0$) a její experimentální realizace je jednoduchá pro mnoho fyzikálních systémů. Jak bylo uvedeno výše, hlavní výhodou perturbace je, že nezmění řešení rovnice 3.12. Stejně jako u OGY metody je tedy ke stabilizaci nestabilních periodických orbitů použita pouze malá vnější síla.

Další výhodou také je, že nejsou potřebné další informace o nestabilním periodickém orbitu, kromě jeho periody τ a v případě řízení v diskrétním čase pouze jeho řád.

Diskrétní verze metody TDAS [44], vhodná pro stabilizaci chaotických map, má následující formu:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(x_n) + F_n \\ F_n &= K[x_{n-m} - x_n] \end{aligned} \quad (3.14)$$

kde m vyjadřuje řád požadovaného nestabilního periodického orbitu.

V průběhu stabilizace mohou nastat problémy s velikostí perturbace F , kdy její hodnota může velmi vzrůst, a proto musí být omezena. Velká hodnota perturbace má fatální vliv na kvalitu stabilizace, zvláště v případě vyšších řádů periodických orbitů, kde metoda selhává.

Tímto problémem se zabývali Socolar, Sukow a Gauthier [45] a zobecnili rovnici 3.13 využitím předešlých informací o stavu systému:

$$F(t) = K \left((1 - R) \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} x(t - m\tau) - x(t) \right), \quad (3.15)$$

kde $0 \leq R < 1$ a K je experimentálně nastavitelná konstanta. Zajímavostí je, že výše uvedená rovnice přesně reprezentuje vystupující svazek z interferometru, složený ze zrcadel s odrazivostí R , uspořádaných tak, že doba průchodu svazku kavitou je rovna periodě nestabilního periodického orbitu. Tuto modifikovanou verzi pojmenovali Extended Time Delayed Auto Synchronization (ETDAS). Stejně jako původní verze, je ETDAS snadno implementovatelná, což bylo experimentálně ověřeno [45]. Rovnici 3.15 lze přepsat do tvaru 3.16 ekvivalentní náhradou sumačního členu [50].

$$\begin{aligned} F(t) &= K[(1 - R)S(t - \tau) - x(t)] \\ S(t) &= x(t) + RS(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.16)$$

kde R je nastavitelná konstanta a S je dané rovnicí, využívající předchozí stavy systému. Diskrétní podoba metody ETDAS je ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(x_n) + F_n \\ F_n &= K[(1 - R)S_{n-m} - x_n] \\ S_n &= x_n + RS_{n-m} \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde symbol m reprezentuje řád požadovaného nestabilního periodického orbitu.

4 STABILIZACE MODELOVÉHO SYSTÉMU

V této kapitole budou uvedeny výsledky testů stabilizace zvolených chaotických modelů výše popsanými metodami TDAS a ETDAS. Všechny metody jsou vytvořeny a testovány v programovém prostředí MATLAB. Optimalizace koeficientů, vedoucích ke stabilizaci periodických orbitů, je pomocí genetických algoritmů, metody simulovaného žíhání a metody pattern search. Logistické zobrazení bylo vybráno jako příklad jednodimenzionálního systému a Hénonova mapa jako příklad dvoudimenzionálního systému.

Zvolené optimalizační metody

Genetický algoritmus (GA) [52] je robustní optimalizační nástroj, řadící se k takzvaným evolučním výpočetním technikám (EVT). Vycházejí z principů Darwinovy a Mendelovy evoluční teorie a poprvé je uvedl John Holland v roce 1975. Níže je uveden pseudokód pro genetický algoritmus:

Algorithm 1 Pseudokód genetického algoritmu.

```
begin
  Choose a coding to represent variables
  Initialize population
  Evaluate population
  repeat
    Reproduction
    Crossover
    Mutation
    Evaluate population
  until the termination criteria is met
end.
```

Pattern search (PS) je numerická optimalizační metoda, která je založena na principu využití minimálního a maximálního pozitivního základního vzoru. Využívá pouze hodnotu kritériální funkce, nevyžaduje tedy diferencovatelnost ani spojitost funkce, na rozdíl od klasických gradientních metod. V každé iteraci metoda používá množinu vektorů, zvaných *Pattern*, k nalezení dalších bodů vedoucích k minimalizaci kritériální funkce. Pattern search spadá do skupiny metod známých jako direct search metody [54].

Simulované žíhání (SA) [58] je pravděpodobnostní optimalizační metoda, která byla zpočátku vyvinuta a aplikována na kombinatorické problémy. Tato metoda napodobuje fyzikální proces žíhání tuhého tělesa. Je vhodná i pro složitější problémy, protože s určitou pravděpodobností připouští zhoršení kritériální funkce, čímž zabrání uvíznutí algoritmu v lokálním minimu. Následující tabulka ukazuje ekvivalentnost procesu žíhání tuhého tělesa s optimalizačním průběhem. Tabulka je převzata z knihy profesora Zelinky a spol [59].

žíhání	kombinatorická optimalizace
stav systému	přípustné řešení
energie stavu systému	hodnota kritériální funkce
změna stavu systému	přechod k sousednímu řešení
teplota	řídící parametr
ustálený stav systému	heuristické řešení

Podrobnější popis výše uvedených metod a jejich implementace v MATLABU je uveden v [51, 53].

Kritériální funkce (Cost function)

Volba kritériální funkce má podstatný vliv na kvalitu kontroly systému. Nejjednodušší způsob optimalizace parametrů, vedoucích ke stabilizaci periodických orbitu, je pomocí rozdílu žádaného výstupu a aktuálního výstupu ve zvoleném časovém intervalu, respektive v daném diskrétním kroku 4.1. Jako kritériální funkce byla použita diskrétní verze kritéria ITAE (Integral of time multiplied by absolute error), kde je odchylka e násobena příslušnou iterací.

$$CF = \sum_{i=1}^n i|e_i|, \quad (4.1)$$

$$e_i = ZY_i - AY_i$$

kde: ZY - žádaný výstup, AY - aktuální výstup a n - počet iterací. Tato kritériální funkce je vhodná i pro stabilizaci periodických orbitů vyšších stupňů.

4.1 Stabilizace logistického zobrazení

Logistické zobrazení bylo podrobně popsáno v kapitole 2. Stabilizace systému byla provedena ve zvolených nestabilních periodických orbitech, konkrétně v $p - 1$ orbitu (limitní bod systému) a $p - 2$ orbitu (orbit s periodou 2). Níže bude uveden výpočet zvolených periodických orbitů [25]:

1. $p - 1$ orbit

Řešíme rovnici:

$$f_r(x) = x, \quad (4.2)$$

což pro logistické zobrazení je:

$$rx(1 - x) = x \quad (4.3)$$

Rovnici vyhovují dvě řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = (r - 1)/r$, přičemž $x_1 = 0$ existuje vždy a $x_2 = (r - 1)/r$ pouze za předpokladu $r > 1$.

2. $p - 2$ orbit

Periodické body s periodou dva lze nalézt za předpokladu $r > 3$, řešíme rovnici pro zobrazení $f_r^2(x)$:

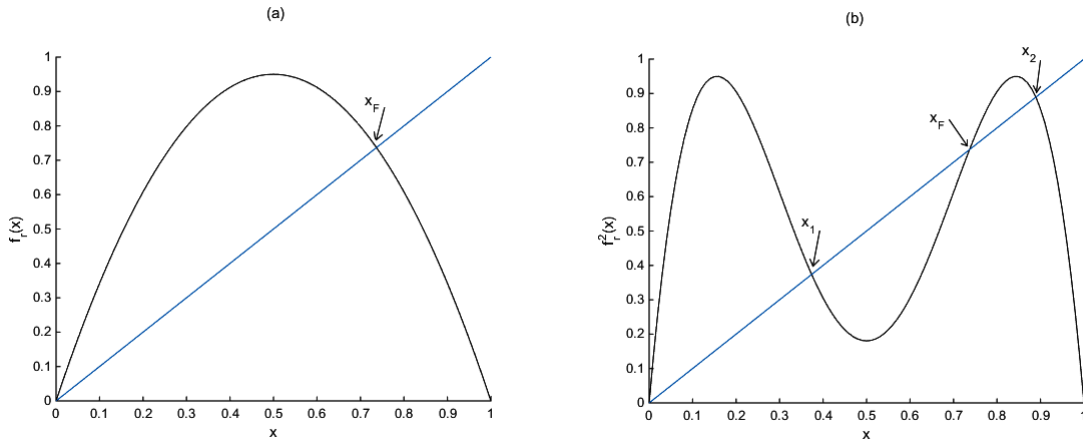
$$\begin{aligned} f_r^2(x) &= x \\ rf_r(x)(1 - f_r(x)) &= r^2x(1 - x)(1 - rx(1 - x)) = x \end{aligned} \quad (4.4)$$

Rovnici vyhovují čtyři řešení, dvě z nich jsou uvedeny výše a další dvě jsou dány $x_{1,2} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$.

Konkrétní hodnoty periodických bodů použitých při testování pro $r = 3, 8$:

$$\begin{aligned} p - 1 : x_F &= 0,73842 \\ p - 2 : x_1 &= 0,3737, \quad x_2 = 0,8894 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Na obrázku 4.1 je grafické zobrazení periodických bodů.



Obr. 4.1: (a) - Funkce $f_{3,8}(x)$, (b) - Funkce $f_{3,8}^2(x)$

Optimalizace parametru K metodou TDAS, proběhla pomocí následujících rovnic:

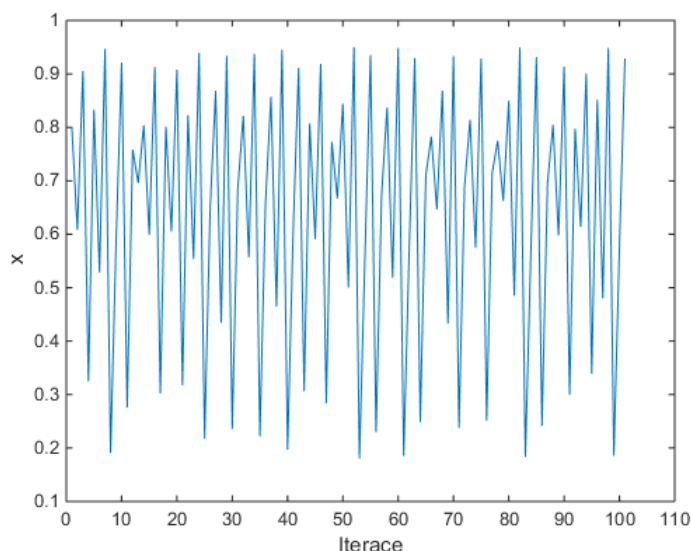
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n) + F_n \\ F_n &= K(x_{n-m} - x_n) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Použitím metody ETDAS je optimalizační úloha výpočetně složitější a optimalizaci podléhají dva parametry K a R . Stabilizující sekvence F_n má formu:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n) + F_n \\F_n &= K[(1 - R)S_{n-m} - x_n] \\S_n &= x_n + RS_{n-m}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Proměnná x je definována v intervalu $(0; 1)$ a aplikováním malé perturbace může hodnota F_n vzrůst natolik, že systém zdiverguje mimo tento interval. Proto hodnota F_n musí být omezena nastavitelným parametrem F_{max} , tedy $F_n \in \langle -F_{max}; F_{max} \rangle$, který také bude podléhat optimalizaci.

Na obrázku 4.2 je vyobrazen nestabilizovaný systém logistického zobrazení pro $x_0 = 0,8$.



Obr. 4.2: Nestabilizované logistické zobrazení, počáteční bod $(0, 8)$

Stabilizace v $p-1$ orbitu

Stabilizace v $p-1$ orbitu proběhla metodou TDAS i ETDAS. Níže budou uvedeny simulační výsledky jednotlivých optimalizačních metod a na závěr porovnány. Optimalizační interval pro všechny použité metody byl $n = 100$ iterací a parametry byly omezeny následujícím rozsahem: $K \in \langle -2; 2 \rangle$, $R \in \langle 0; 1 \rangle$ a $F_{max} \in \langle 0; 0,5 \rangle$.

V případě řešení pomocí GA byly všechny simulace opakovány 100 krát kvůli relevantnějšímu posouzení dosažených výsledků. Dále byl zkoumán vliv velikosti

populace na hodnotu kritériální funkce.

Nastavení testovaných genetických algoritmů pro TDAS:

```

PopulationSize = {5, 10, 50, 100, 150, 200, 400};
LB = [-2 0];
UB = [2 0.5];
SelectionFcn = selectiontournament;
SelectionSize = 4;
EliteCount = 0.05*PopulationSize;
Generations = 500;

```

LB je omezení parametru K a F_{max} zdola a UB je omezení parametru K a F_{max} shora. Selectiontournament znamená, že ze staré generace se vybírají n -tice jedinců a do nové generace se vkládají vždy nejlepší jedinci z těchto n -tic, kde n je SelectionSize.

V tabulkách 4.1 a 4.2 jsou uvedeny výsledky vlivu velikosti populace na minimální hodnotu kritériální funkce a její průměr. Hodnoty pro populaci 150 TDAS a 400 ETDAS budou níže srovnány se zbývajících optimalizačními algoritmy.

populace	5	10	50	100	150	200	400
K	-0,39595	-0,38552	-0,39622	-0,39655	-0,39655	-0,39581	-0,39637
Fmax	0,09010	0,13562	0,07677	0,03116	0,03105	0,09628	0,065933
CF min.	9,80420	9,78260	9,79470	9,75780	9,75740	9,80450	9,7869
CF prům.	438,78334	234,38862	27,53841	16,73028	13,27531	13,34226	12,943505
Sm. odch.	365,38940	307,20525	66,69974	30,38194	1,09860	0,80143	0,79377
Median	499,94500	30,43900	13,94150	13,56200	13,14700	13,42250	12,64900

Tab. 4.1: Vliv velikosti populace na CF, TDAS, $p = 1$

populace	5	10	50	100	150	200	400
K	-0,49270	-0,49635	-0,48096	-0,49304	-0,49056	-0,49423	-0,48678
R	0,23444	0,24376	0,17837	0,20917	0,19940	0,22576	0,21718
Fmax	0,46631	0,44801	0,49529	0,43265	0,44230	0,44378	0,49320
CF min.	22,15400	22,17800	22,29000	22,25900	22,25700	22,24200	22,13000
CF prům.	1271,05928	942,92925	143,85802	74,81697	33,84435	22,54019	22,43962
Sm. odch.	758,17387	766,77201	364,13073	256,77656	112,21864	0,21316	0,16896
Median	1514,25000	1315,00000	22,80050	22,49900	22,55450	22,45000	22,40550

Tab. 4.2: Vliv velikosti populace na CF, ETDAS, $p = 1$

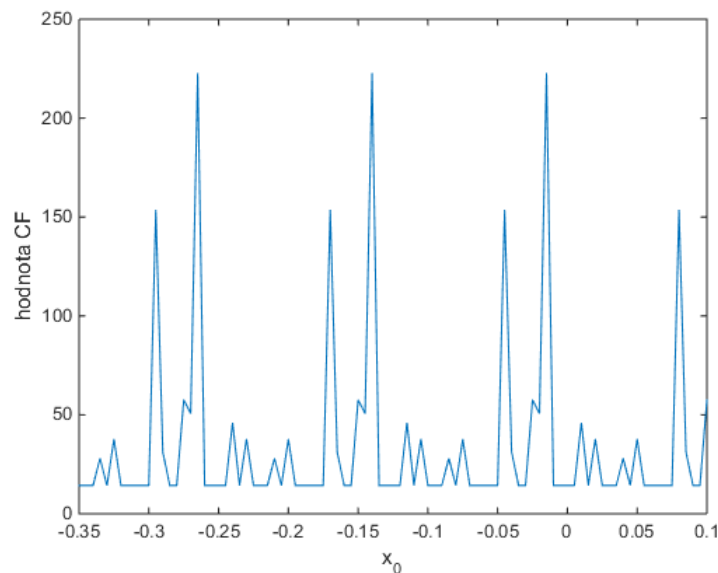
Pattern search je velice rychlý optimalizační algoritmus, u kterého o úspěšnosti řešení především rozhoduje výchozí bod algoritmu, což je v případě ETDAS velmi složité, protože je nutné zadat vhodnou kombinaci tří výchozích bodů. Algoritmus se nepodařil vhodně nastavit a proto byla stabilizace řešena pouze metodou TDAS pro dva zvolené výchozí body. Byl zkoumán vliv výchozího bodu parametru K na hodnotu kritériální funkce. Výchozí bod byl testován pro hodnoty z intervalu $\langle -2; 2 \rangle$ s krokem $k = 0,005$. Pro tento interval nejsou všechna řešení konvergentní, přičemž divergentní oblast je nezanedbatelná a značně stěžuje počáteční nastavení algoritmu. Nejúspěšnější řešení bude níže použito ke srovnání.

Nastavení metody pattern search:

```
x_0 = [-2:0.005:2];
LB = [-2 0];
UB = [2 0.5];
MaxIter = 500;
CompletePoll = on;
PollMethod = GSSPositiveBasis2N
TolFun = 1e-10;
```

GSSPositiveBasis2N generuje $2N$ vektory, kde N je počet nezávislých proměnných kritériální funkce.

Na obrázku 4.3 je zobrazen vliv výchozího bodu na hodnotu kritériální funkce v konvergentní oblasti.



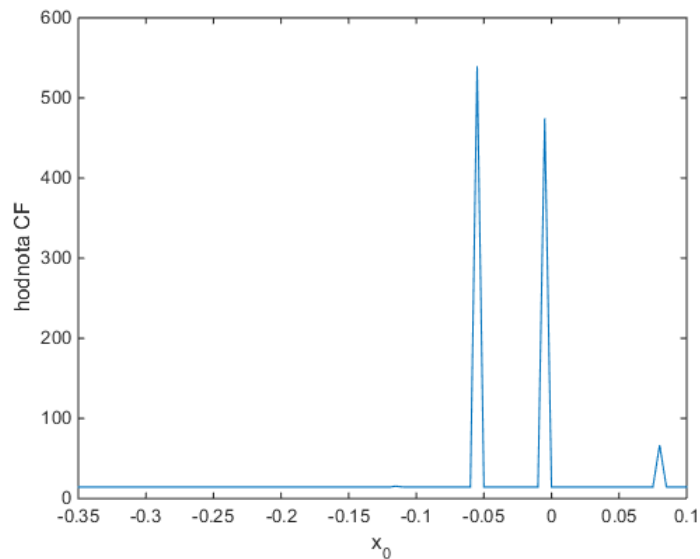
Obr. 4.3: Vliv výchozího bodu PS na hodnotu CF

Stejně jako v předešlém případě, úspěšnost metody simulovaného žíhání je závislá i na dobře zvoleném výchozím bodu. Byla zkoumána konvergentní oblast řešení a také vliv počáteční teploty na hodnotu kritériální funkce. Testování výchozího bodu parametru K bylo ze stejného intervalu jako v případě pattern search se stejným krokem. Počáteční teploty byly zvoleny 50, 100, 200, 500, 1000. Pro každou variantu teploty byla simulace opakována pro sto různých výchozích bodů.

Nastavení metody simulovaného žíhání :

```
x_0 = [-2:0.005:2];
LB = [-2 0];
UB = [2 0.5];
InitialTemperature = {50, 100, 200, 500, 1000};
TemperatureFcn = temperatureexp;
AnnealingFcn = annealingfast;
TolFun = 1e-10;
```

Na obrázku 4.4 je zobrazen vliv výchozího bodu na hodnotu kritériální funkce v konvergentní oblasti při použití metody TDAS.



Obr. 4.4: Vliv výchozího bodu SA na hodnotu CF

V tabulkách 4.3 a 4.4 je uveden vliv počáteční teploty na hodnotu kritériální funkce, hodnoty pro $t = 200$ TDAS a $t = 100$ ETDAS budou použity ve srovnání.

teplota	50	100	200	500	1000
K	-0,39655	-0,39654	-0,39641	-0,39651	-0,39655
Fmax	0,03183	0,02613	0,00325	0,01785	0,03719
CF min.	9,75810	9,75250	9,74060	9,74540	9,76320
CF prům.	31,28054	28,57428	38,92285	26,79822	29,15135
Sm. odch.	108,51870	106,79106	128,56289	95,53817	96,15768
Median	13,48450	13,47650	13,37550	13,56250	13,36450

Tab. 4.3: Vliv počáteční teploty na CF, TDAS, $p - 1$

teplota	50	100	200	500	1000
K	-0,48328	-0,50204	-0,49681	-0,48772	-0,48474
R	0,19294	0,27571	0,21968	0,18173	0,18271
Fmax	0,49340	0,42127	0,41400	0,44478	0,47023
CF min.	22,25000	22,17200	22,28600	22,29500	22,28800
CF prům.	195,97930	111,07248	121,68822	153,35376	135,86416
Sm. odch.	413,60679	323,30696	333,06395	393,47103	358,20028
Median	22,98050	22,81200	22,74600	22,90500	22,84050

Tab. 4.4: Vliv počáteční teploty na CF, ETDAS, $p - 1$

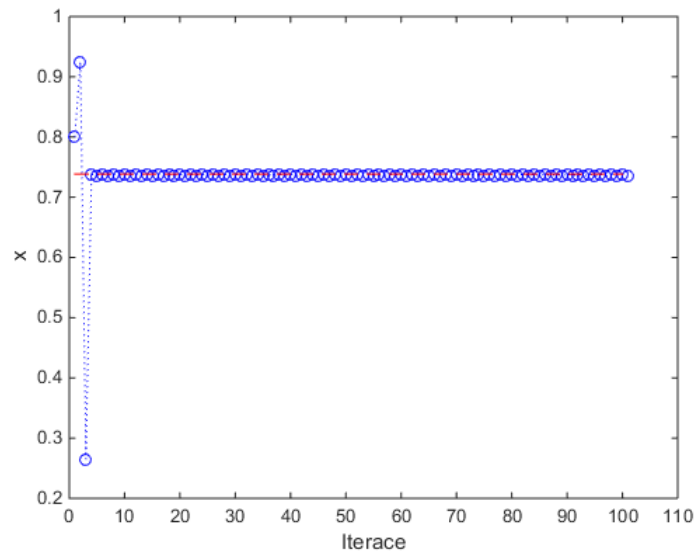
Srovnání

Zvolené stabilizační sekvence TDAS i ETDAS ukázali schopnost efektivně řešit méně náročné problémy stabilizace v $p - 1$ orbitu. Nespornou předností je jednoduchá implementace obou metod. Optimalizace parametru K metody TDAS se úspěšně povedla všem třem zvoleným optimalizačním metodám. Jak už bylo poznamenáno výše, metodu PS se nepovedlo vhodně implementovat pro optimalizaci parametrů pro ETDAS, ale ze všech zvolených optimalizačních metod nejrychleji dosáhla řešení. GA i SA podali obdobně kvalitní výkon, přičemž nižší hodnoty kritériální funkce dosáhlo řešení pomocí SA pro TDAS a GA pro ETDAS.. Zkoumaná konvergentní oblast řešení v závislosti na výchozím bodu byla pro PS a SA stejná, avšak v druhém případě byl průměr hodnot kritériální funkce v konvergentní oblasti nižší. Vliv počáteční teploty SA na minimální a průměrnou hodnotu kritériální funkce pro takto jednoduchou úlohu nebyl významný. Metoda GA úspěšně našla řešení i pro malé počáteční populace, které zřetelně zrychlí optimalizační průběh, řádově o tisíce sekund. Velká populace nemusí nutně znamenat menší hodnotu kritériální funkce, avšak výsledky jsou poplatné nastavení.

V tabulce 4.5 jsou shrnuty výsledky testů pro $p - 1$ orbit. Na obrázku 4.5 je zobrazeno stabilizované logistické zobrazení v $p - 1$ orbitu pro $x_0 = 0,8$.

	TDAS			ETDAS	
	GA	PS	SA	GA	SA
K	-0,39655	-0,46680	-0,39641	-0,48678	-0,50204
R	-	-	-	0,21718	0,275771
Fmax	0,03105	0,39730	0,00325	0,49320	0,42127
CF min.	9,75740	14,14830	9,74060	22,13000	22,17200
CF prům.	13,27531	34,59694	38,92285	22,43962	111,07248
Sm. odch.	1,09860	-	128,56289	0,16896	323,30696
Median	13,56200	-	13,37550	22,40550	22,81200

Tab. 4.5: Srovnání nejlepších výsledků TDAS a ETDAS, $p - 1$



Obr. 4.5: Stabilizované logistické zobrazení v $p - 1$ orbitu, počáteční bod $(0,8)$

Stabilizace v $p-2$ orbitu

Stabilizace v $p-2$ orbitu je poněkud složitější než v předchozím případě a proběhla pouze metodou ETDAS, protože metoda TDAS nebyla plně schopna stabilizovat orbit s periodou dva, což se vzhledem k charakteru metody očekávalo. Optimalizační metody byly použity genetický algoritmus a simulované žíhání, neboť metoda pattern search nenalezla požadované řešení. Optimalizační interval pro všechny použité metody byl $n = 150$ iterací a parametry K , R a F_{max} byly omezeny stejným rozsahem.

Optimalizace parametrů pomocí genetického algoritmu probíhala totožně jako pro $p-1$ orbit. V tabulce 4.6 je uveden vliv počáteční populace na hodnotu kritériální funkce a na její průměrnou hodnotu při sto opakování. Hodnoty pro populaci 400 budou níže srovnány se simulovaným žíháním.

populace	5	10	50	100	150	200	400
K	0,44873	0,48424	0,49763	0,49891	0,49937	0,44503	0,44718
R	0,30833	0,37878	0,28629	0,27565	0,27188	0,22623	0,22007
Fmax	0,10673	0,21220	0,16350	0,16164	0,16084	0,04248	0,04010
CF min.	6,59900	3,14790	1,99090	1,94450	1,92820	1,20880	1,19720
CF prům.	3770,10392	3404,00078	858,30675	120,03262	69,59013	35,19664	6,56966
Sm. odch.	1578,69609	1688,89956	1437,51220	526,36324	386,29278	280,09752	2,92400
Median	4294,85000	4200,55000	9,44030	9,10505	8,97850	8,41620	8,08595

Tab. 4.6: Vliv velikosti populace na CF, ETDAS, $p-2$

Testování simulovaného žíhání probíhalo pro stejné teploty jako v případě $p-1$ orbitu. Zkoumání vlivu výchozích bodů na oblasti konvergence pro $p-2$ orbit by bylo náročné, proto byly výchozí body náhodně vybrány z daného intervalu. Výsledné hodnoty pro různé počáteční teploty jsou uvedeny v tabulce 4.7, ze které bylo vybráno řešení pro teplotu $t = 200$ k porovnání s metodou GA.

teplota	50	100	200	500	1000
K	0,49674	0,43704	0,43654	0,49813	0,49734
R	0,29354	0,25558	0,24685	0,28217	0,28865
Fmax	0,16449	0,06106	0,04367	0,16285	0,16387
CF min.	2,02280	1,71270	1,66020	1,97230	2,00090
CF prům.	1795,50664	1625,52516	1686,12273	1762,54380	2084,60733
Sm. odch.	1746,04480	1734,43763	1780,75561	1810,52737	1732,64989
Median	2491,20000	266,06500	654,97000	771,02500	2818,20000

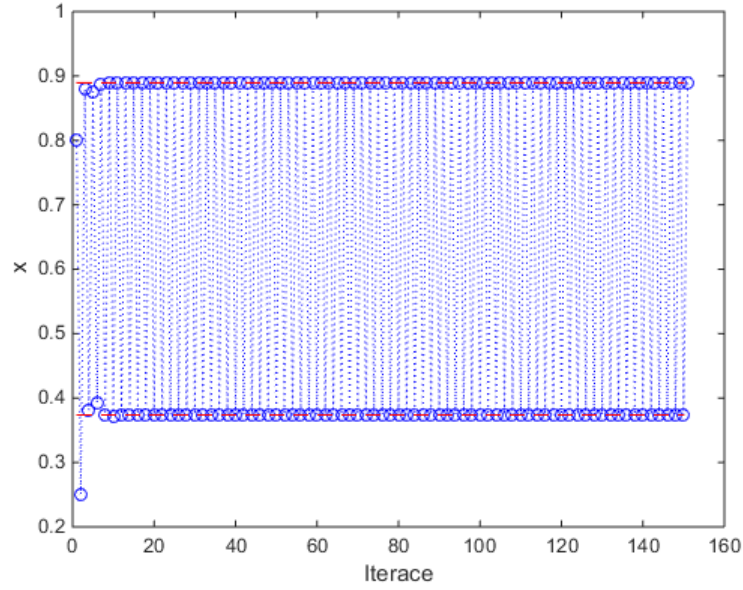
Tab. 4.7: Vliv počáteční teploty na CF, ETDAS, $p-2$

Srovnání

Metoda ETDAS se ukázala jako vhodný nástroj pro řešení stabilizace i orbitů s vyšší periodou. Při optimalizaci parametrů, GA prokázal svoji robustnost a schopnost řešit složitější problémy bez rozsáhlejší parametrizace. Nejnižší hodnota kritériální funkce ze sta opakování se u SA a GA příliš neliší, avšak rozdíl průměrných hodnot je markantní. Vysokou hodnotu průměrné kritériální funkce simulovaného žíhání má za následek závislost úspěšnosti metody i na výchozím bodu. Počáteční velikosti populace GA neměla velký vliv na minimální hodnotu kritériální funkce, ale průměrné hodnoty pro malé populace jsou o dost vyšší ve srovnání s $p - 1$ orbitem. Taktéž průměrné hodnoty kritériální funkce SA vzrostly pro všechny zkoumané teploty. V tabulce 4.8 jsou srovnány výsledky a na obrázku 4.6 je logistické zobrazení stabilizované v $p - 2$ orbitu pro $x_0 = 0,6$ a $y = 0,6$.

	ETDAS	
	GA	SA
K	0,44718	0,43654
R	0,22007	0,24685
Fmax	0,04010	0,04367
CF min.	1,19720	1,66020
CF prům.	6,56966	1686,12273
Sm. odch.	2,92400	1780,75561
Median	8,08595	654,97000

Tab. 4.8: Srovnání nejlepších výsledků ETDAS, $p - 2$



Obr. 4.6: Stabilizované logistické zobrazení v $p - 2$ orbitu, počáteční bod $(0, 8)$

4.2 Stabilizace Hénonovy mapy

Stabilizace Hénonovy mapy byla provedena, stejně jako v předchozím případě, v nestabilních periodických orbitech $p - 1$ a $p - 2$. V testování byla použita ekvivalentní úprava Hénonovy mapy dle rovnice 4.8 uvedená v [55]. Diskuze na téma ekvivalentnosti řešení pro originální definici Hénonovy mapy 2.17 a její upravenou variantu 4.8 je uvedena v [56], kde autoři Matoušek a kol. uvádějí pro upravenou variantu větší oblast konvergence k chaotickému atraktoru než u originální definice.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

Postup výpočtu periodických bodů je stejný jako pro logistické zobrazení, musíme vyřešit rovnici $f_{a,b}(x) = x$, respektive $f_{a,b}^2(x) = x$. Pro zvolené hodnoty parametru $a = 1,2$ a $b = 0,3$, vyhovují dva limitní body - $x_{F1} = 0,8$, $x_{F2} = -1,5$ a čtyři periodické orbity - dva předešlé a $x_1 = 1,2624$, $x_2 = -0,5624$.

Optimalizační sekvence metodou TDAS je následující:

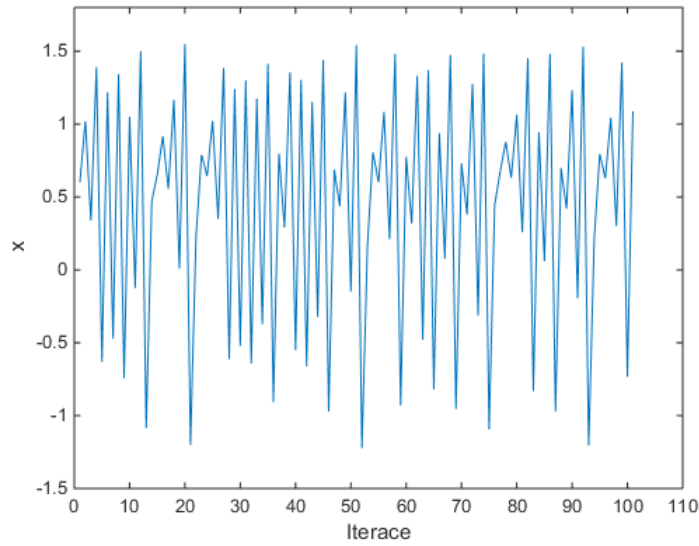
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a - x_n^2 + by_n + F_n \\ y_{n+1} &= x_n \\ F_n &= K(x_{n-m} - x_n) \end{aligned} \quad (4.9)$$

kde opět hledáme optimální hodnotu parametru K . V případě ETDAS je stabilizující

sekvence ve formě 4.10 s parametry K a R .

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - x_n^2 + by_n + F_n \\y_{n+1} &= x_n \\F_n &= K[(1 - R)S_{n-m} - x_n] \\S_n &= x_n + RS_{n-m}\end{aligned}\tag{4.10}$$

Na obrázku 4.7 je vyobrazen nestabilizovaný systém Hénonovy mapy pro $x_0 = 0,6$ a $y_0 = 0,6$. Nezbytné je omezení hodnoty F_n , tak aby systém zůstal



Obr. 4.7: Nestabilizovaná Hénonova mapa, počáteční bod $(0,6;0,6)$

v konvergentní oblasti $\langle 1,5;1,5 \rangle$ po aplikování malé perturbace.

Stabilizace v $p-1$ orbitu

Stabilizace v $p-1$ orbitu probíhala stabilizační sekvencí TDAS i ETDAS. K optimalizaci parametrů byly použity všechny tři výše uvedené metody. Optimalizační interval byl stejně jako u logistického zobrazení $n = 100$. Hodnoty parametrů K , R a F_n byly opět omezeny rozsahem: $K \in \langle -2;2 \rangle$, $R \in \langle 0;1 \rangle$, $F_{max} \in \langle 0;0.5 \rangle$. Protože nastavení optimalizačních metod je shodné jako pro logistické zobrazení, budou níže uvedeny simulační výsledky bez rozsáhlejšího popisu a závěrem porovnány.

V tabulkách 4.9 a 4.10 je uveden vliv počáteční velikosti populace genetického algoritmu na hodnotu kritériální funkce.

populace	5	10	50	100	150	200	400
K	-0,96378	-0,96380	-0,96378	-0,96378	-0,96378	-0,96378	-0,96378
Fmax	0,21880	0,21877	0,21862	0,21865	0,21863	0,21863	0,21863
CF min.	8,85320	8,85200	8,85000	8,84990	8,84960	8,84960	8,84950
CF prům.	501,16796	365,54343	26,45603	9,36676	9,29213	9,13578	8,931919
Sm. odch.	287,22452	311,98958	90,29948	0,70162	0,58277	0,51360	0,24938
Median	635,04500	405,72000	9,55005	8,85995	8,86235	8,85570	8,85170

Tab. 4.9: Vliv velikosti populace na CF, TDAS, $p - 1$

populace	5	10	50	100	150	200	400
K	-0,97304	-0,98104	-0,98101	-0,98100	-0,98103	-0,98104	-0,98077
R	0,06979	0,12708	0,12690	0,12683	0,12706	0,12716	0,12517
Fmax	0,35304	0,49989	0,49926	0,49913	0,49980	0,49999	0,49442
CF min.	8,82410	8,79860	8,79870	8,79880	8,79860	8,79850	8,8002
CF prům.	5424,44185	4044,19509	460,27420	57,63487	10,54097	9,16065	8,908702
Sm. odch.	2669,75781	3026,05407	1506,81553	478,36441	8,80411	1,07978	0,09012
Median	6490,00000	5904,50000	9,08670	8,96000	8,93920	8,94200	8,93350

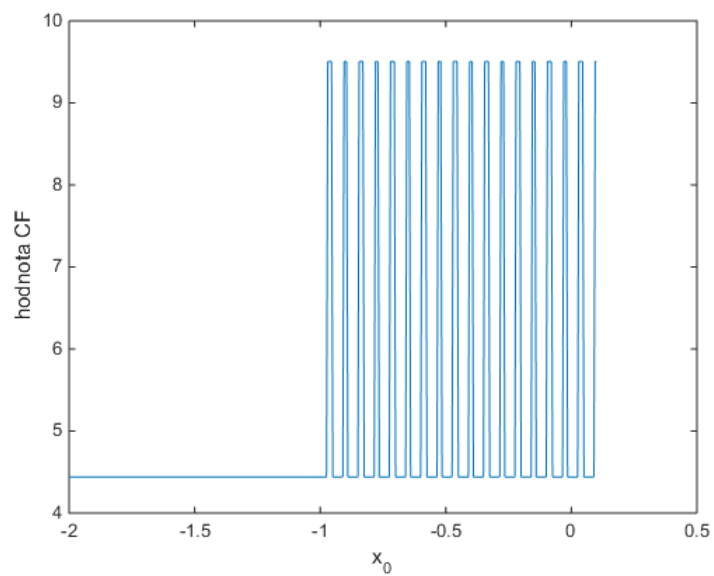
Tab. 4.10: Vliv velikosti populace na CF, ETDAS, $p - 1$

Optimalizace parametrů metodou pattern search proběhla opět pouze jen pro stabilizující sekvenci TDAS. Na obrázku 4.8 je vyobrazen vliv výchozího bodu parametru K na hodnotu kritériální funkce v konvergentní oblasti řešení.

Výsledky z testování parametrů simulovaného žíhání jsou popsány v tabulce 4.11 a 4.12. Do grafu 4.9 byl taktéž vynesena vliv výchozího bodu na hodnotu kritériální funkce pro metodu simulovaného žíhání.

teplota	50	100	200	500	1000
K	-0,96378	-0,96378	-0,96378	-0,96378	-0,96378
Fmax	0,21863	0,21863	0,21863	0,21862	0,21862
CF min.	8,84950	8,84950	8,84950	8,84950	8,84950
CF prům.	76,11701	81,79363	43,34484	62,45172	86,62064
Sm. odch.	163,57179	179,24846	179,89876	140,49565	127,78163
Median	8,94585	9,09150	8,91915	8,98215	8,91560

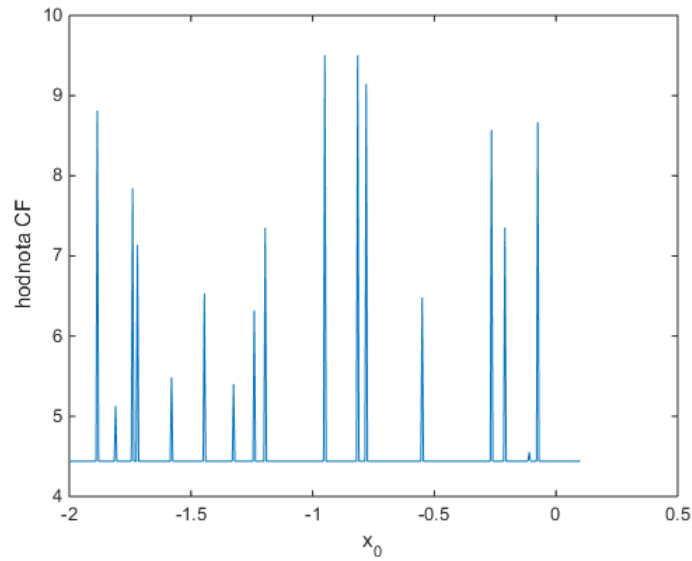
Tab. 4.11: Vliv počáteční teploty na CF, TDAS, $p - 1$



Obr. 4.8: Vliv výchozího bodu PS na hodnotu CF

teplota	50	100	200	500	1000
K	-0,98098	-0,98072	-0,98101	-0,98097	-0,98104
R	0,12673	0,12445	0,12689	0,12639	0,12713
Fmax	0,49879	0,49339	0,49928	0,49847	0,49996
CF min.	8,79890	8,80090	8,79840	8,79930	8,79850
CF prům.	2100,53933	1995,34898	2581,01860	2194,03154	2515,08933
Sm. odch.	2717,20294	2702,57212	2790,92202	2740,61939	2853,15775
Median	9,72525	9,39040	135,41000	13,21780	19,16600

Tab. 4.12: Vliv počáteční teploty na CF, ETDAS, $p - 1$



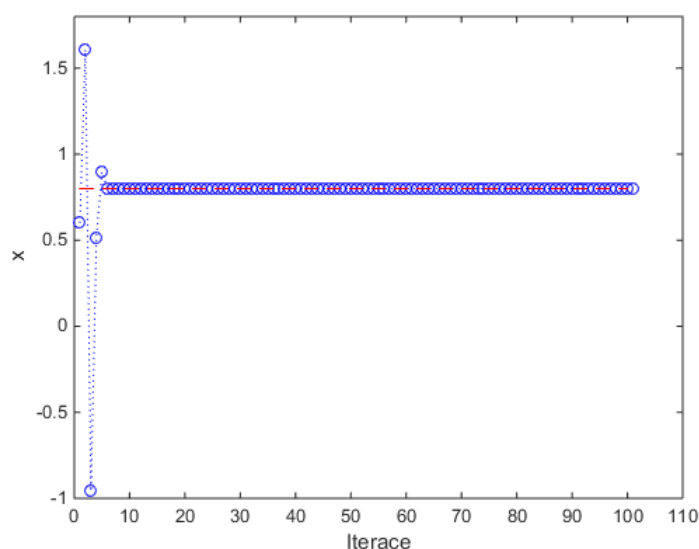
Obr. 4.9: Vliv výchozího bodu SA na hodnotu CF

Srovnání

Všechny tři optimalizační metody dokázaly nalézt srovnatelně kvalitní řešení v krátkém čase. Stejně jako u logistického zobrazení, metoda PS byla použita pouze pro optimalizaci parametrů K a $Fmax$ stabilizující sekvence TDAS, pro které našla nejrychleji řešení, řádově v jednotkách sekund. Metoda SA dosáhla nejmenší hodnoty kritériální funkce, avšak s větším průměrem ze sta opakování než GA. Je nutné poznamenat, že doba trvání optimalizace metodou SA je o řád nižší než u GA. Konvergentní oblast řešení v závislosti na výchozím bodu je u SA i PS stejná. Průměrné hodnoty kritériální funkce v této oblasti je pro SA menší, stejně jako v případě logistické mapy. Pro nízkou hodnotu populace jsou velké výkyvy v nalezeném řešení, což se odráží na průměru, ale již při počáteční populaci 50 pro TDAS a 100 pro ETDAS, průměr rapidně klesne. SA podaly stabilní výkon pro všechny testované počáteční teploty. V tabulce 4.13 jsou shrnuty výsledky jednotlivých metod, hodnoty GA jsou pro počáteční populaci 400 TDAS, 200 EDAS a v případě SA pro počáteční teplotu $t = 200$ TDAS i ETDAS. Stabilizovaná Hénonova mapa v $p - 1$ orbitu je na obrázku 4.10.

	TDAS			ETDAS	
	GA	PS	SA	GA	SA
K	-0,96378	-0,88190	-0,96378	-0,98104	-0,98101
R	-	-	-	0,12716	0,12689
Fmax	0,21863	0,49730	0,21863	0,49999	0,49928
CF min	8,84950	10,40040	8,84950	8,79850	8,79840
CF prům	8,93192	12,36857	43,34484	9,16065	2581,0186
Sm odch	0,24938	-	179,89876	1,07978	2790,92202
Median	8,85170	-	8,91915	8,94200	135,41000

Tab. 4.13: Srovnání nejlepších výsledků TDAS a ETDAS, $p - 1$



Obr. 4.10: Stabilizovaná Hénonova mapa v $p - 1$ orbitu, počáteční bod $(0, 6; 0, 6)$

Stabilizace v $p-2$ orbitu

Stabilizace v $p - 2$ orbitu proběhla optimalizační sekvencí ETDAS, protože metoda TDAS selhala, stejně jako u logistické mapy, a nenalezla požadované řešení. K optimalizaci parametrů byly použity genetický algoritmus a simulované žíhání. Testování proběhlo pro stejné hodnoty jako v předcházejících případech. Výsledky testů jsou uvedeny v tabulkách 4.14 a 4.15.

populace	5	10	50	100	150	200	400
K	0,82980	0,72021	0,70348	0,70145	0,69816	0,69429	0,69046
R	0,72256	0,55816	0,53450	0,51337	0,48988	0,47712	0,45967
Fmax	0,26944	0,33243	0,35375	0,30058	0,24828	0,23258	0,20302
CF min	31,71800	27,46800	23,36400	22,15800	21,95800	21,16500	20,73200
CF prům.	8458,43728	6402,08403	966,36903	293,68157	116,89867	82,69039	60,43753
Sm. odch.	4648,26645	4160,32443	1967,38449	667,18116	186,86516	68,15557	39,66688
Median	8493,90000	7538,15000	133,70500	102,11000	74,63050	68,52350	66,44500

Tab. 4.14: Vliv velikosti populace na CF, ETDAS, $p - 2$

teplota	50	100	200	500	1000
K	0,69609	0,70459	0,70443	0,69692	0,72472
R	0,50444	0,52836	0,50828	0,50131	0,54369
Fmax	0,30438	0,32851	0,26781	0,29013	0,25820
CF min	25,06000	22,27500	24,40100	23,96600	32,79700
CF prům.	2345,7673	1836,18569	2346,61707	2344,21307	1923,07813
Sm. odch.	2999,57814	2707,90250	2957,97049	2904,70796	2640,80272
Median	233,33000	228,67500	279,57500	312,48500	225,59000

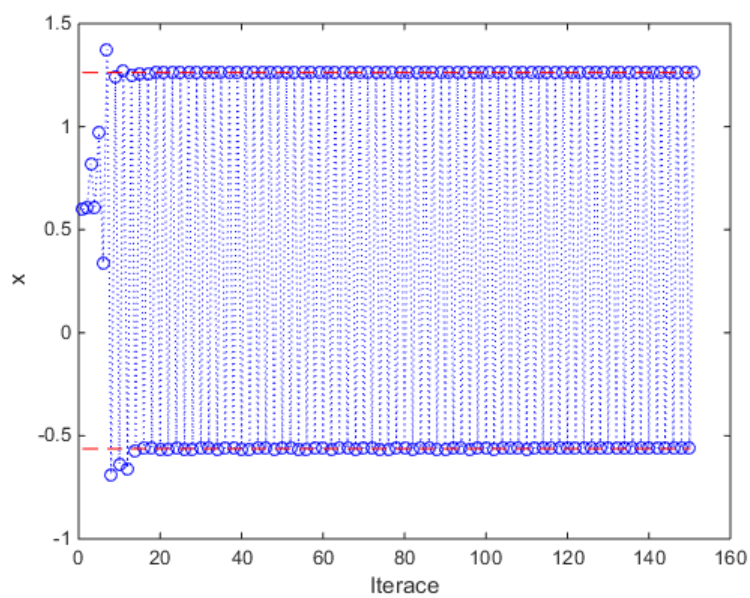
Tab. 4.15: Vliv počáteční teploty na CF, ETDAS, $p - 2$

Srovnání

I v případě Hénonovy mapy stabilizující sekvence ETDAS potvrdila svoji schopnost vypořádat se se složitější úlohou. Průměrná hodnota kritériální funkce při použití SA stále značně převyšuje výsledek GA. Vliv malé počáteční populace GA je zde ze všech případů nejpatrnější. Procentuální úspěšnost nalezení akceptovatelného řešení není velká a průměr ze sta opakování se zmenšuje až při počáteční populaci 200. Srovnání výsledků testování je uvedeno v tabulce 4.16, kde výsledek GA je pro populaci 400 a SA pro počáteční teplotu 100. Obrázek 4.11 zobrazuje stabilizovaná Hénonova mapa v $p - 2$ orbitu.

	ETDAS	
	GA	SA
K	0,69046	0,70459
R	0,45967	0,52836
Fmax	0,20302	0,32851
CF min	20,73200	22,27500
CF prům.	60,43753	1836,18569
Sm. odch.	39,66688	2707,90250
Median	66,44500	228,67500

Tab. 4.16: Srovnání nejlepších výsledků ETDAS, $p = 2$



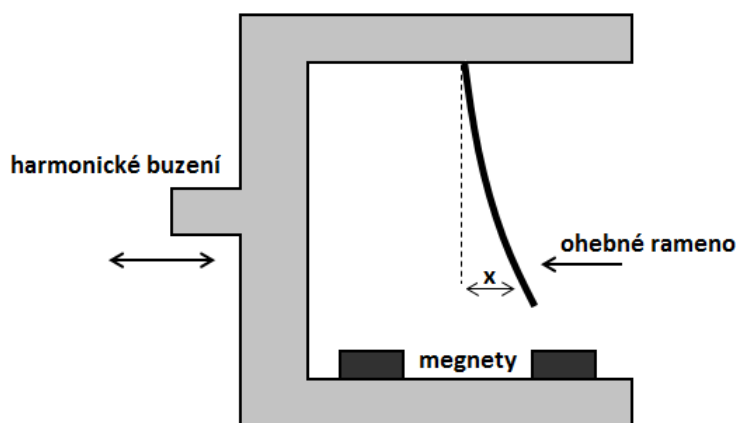
Obr. 4.11: Stabilizovaná Hénonova mapa v $p = 2$ orbitu, počáteční bod $(0, 6; 0, 6)$

5 DUFFINGŮV OSCILÁTOR

Duffingova rovnice 5.1 se vyskytuje v několika formách, neboť ji lze parametrizovat tak, aby popisovala požadovaný systém. Originální model byl představen německým inženýrem G. Duffingem [57] v roce 1918. Nejčastěji Duffingova rovnice reprezentuje model oscilátoru, který je popsán nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t), \quad (5.1)$$

kde δ vyjadřuje tlumení, α odpovídá tuhosti pružiny, β je míra nelinearity, γ je amplituda vnějšího buzení a ω je frekvence vnějšího buzení. Jestliže je $\beta > 0$, je možné Duffingův oscilátor interpretovat jako nelineární pružinu, jejíž vratná síla je rovna $F = -\beta x - \alpha x^3$. Pro $\beta < 0$ Duffingův oscilátor popisuje model periodicky buzeného ramene z feromagnetického materiálu, který je vychylován směrem k magnetům. Schéma Duffingova oscilátoru je zobrazeno na obrázku 5.1.



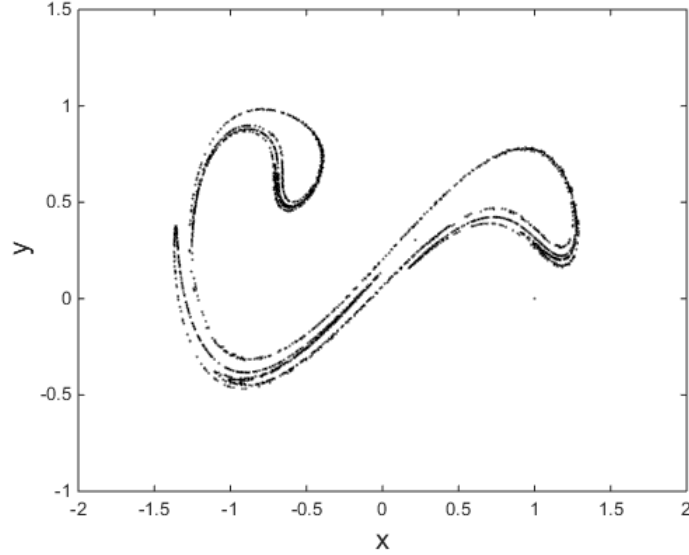
Obr. 5.1: Schéma Duffingova oscilátoru

Rovnici 5.1 lze přepsat do tvaru:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\delta\dot{x} - \beta x - \alpha x^3 + \gamma \cos\psi \\ \omega \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

kde $\psi(0) = 0$. Uvažujme, že osa ψ popisuje kružnici, protože proměnná ψ má 2π periodu. Vykreslením (x, \dot{x}) , když systém prochází Poincarého oblastí $\psi = \psi_0(const.)$, získáme při správném nastavení parametrů chaotický atraktor. Periodické změny chaotického atraktoru při zvětšení periody ψ_0 z 0 na 2π ukazují roztahovací a smršťovací vlastnosti chaosu. Podrobnější informace o chaosu v Duffingově oscilátoru

jsou například v [60]. Na obrázku 5.2 je vyobrazena Poincarého mapa buzeného Duffingova oscilátoru pro nastavení $\gamma = 0,5$, $\psi = 1,25$, $\alpha = 1$, $\delta = 0,3$ a $\beta = 1$.



Obr. 5.2: Atraktor Duffingova oscilátoru

Jestliže $\alpha = 0$ a $\beta = -1$ [61] můžeme rovnici 5.1 přepsat jako systém diferenciálních rovnic prvního řádu, který je následující:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y + \gamma \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{5.3}$$

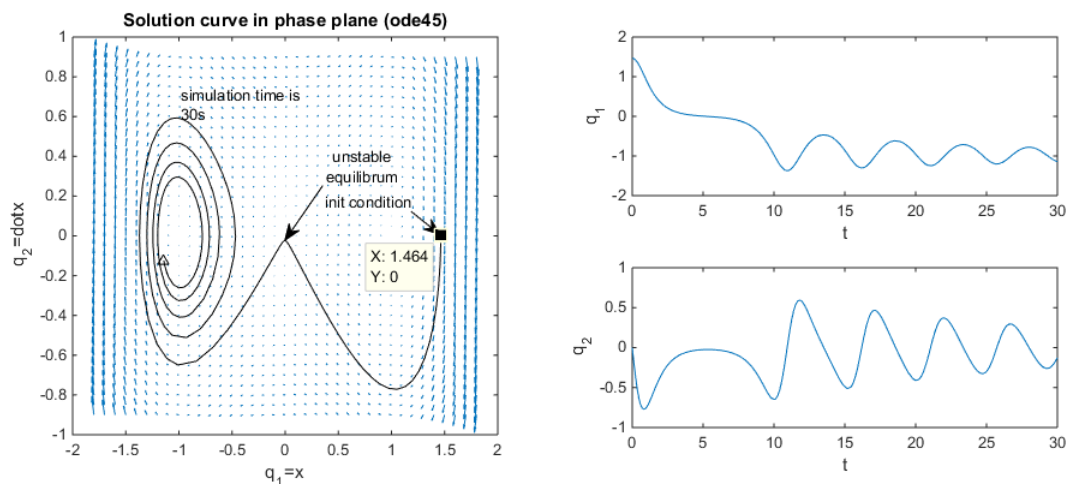
Pro nebuzený oscilátor se systém rovnic redukuje na tvar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y\end{aligned}\tag{5.4}$$

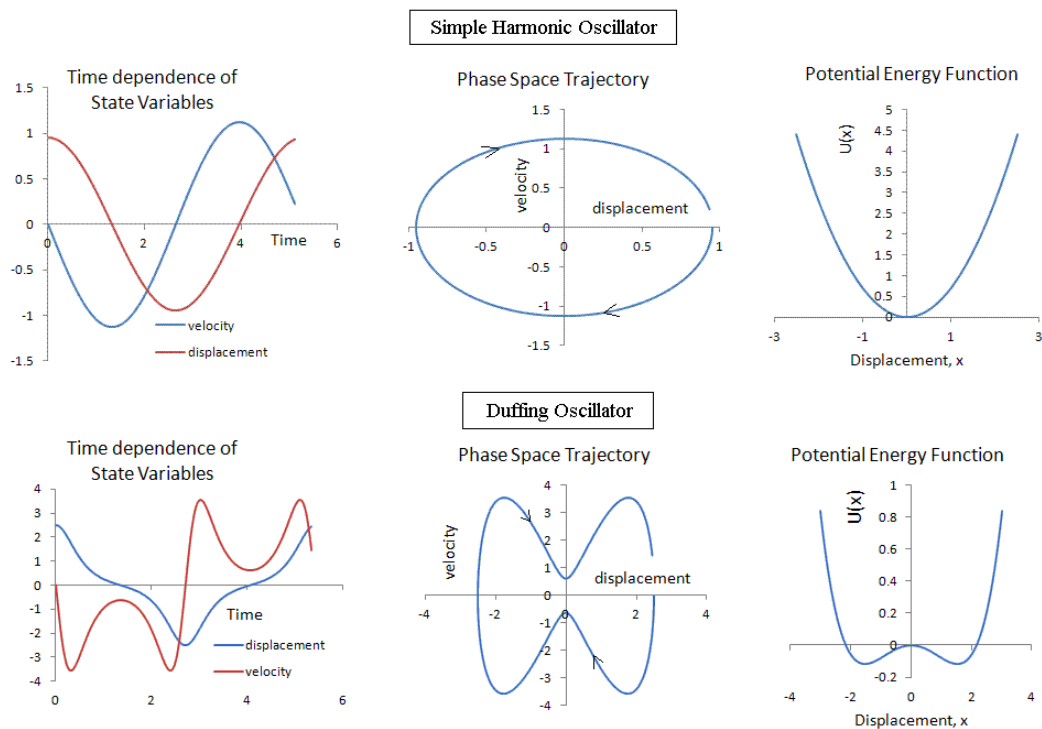
Položíme-li soustavu rovnic 5.4 nule, nalezneme limitní body systému:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y = 0 \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y = x(1 - x^2) = 0\end{aligned}\tag{5.5}$$

Rovnici vyhovují tři řešení: $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (-1,0)$ a $x_3 = (1,0)$. Stabilitu limitních bodů lze vyšetřit linearizováním soustavy rovnic 5.4 a nalezením kořenů charakteristické rovnice, které je triviální a nebude zde uvedeno. Limitní bod x_1 je vždy nestabilní a zbylé dva limitní body jsou asymptoticky stabilní pro $\delta > 0$, stabilní pro $\delta = 0$ a nestabilní pro $\delta < 0$. Na obrázku 5.3 je zobrazen fázový portrét Duffingova oscilátoru a vývoj jednotlivých proměnných v čase.



Obr. 5.3: Fázový portrét Duffingova oscilátoru bez buzení

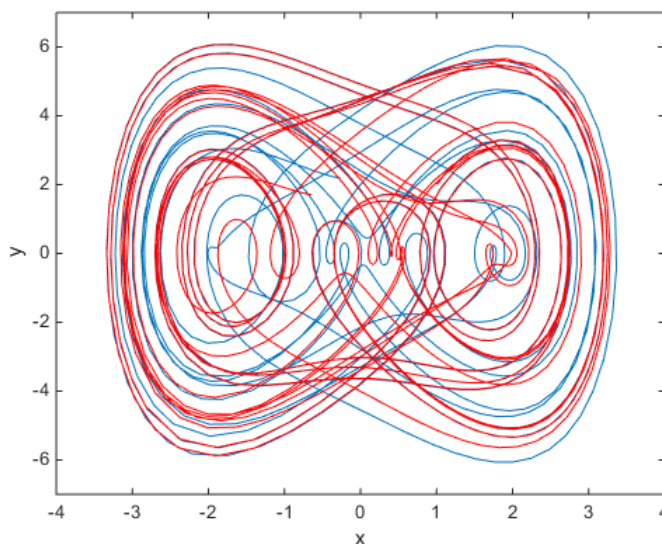


Obr. 5.4: Analogie mezi harmonickým a Duffingovým oscilátorem [62]

Pro názornější představu dynamických vlastností Duffingova oscilátoru je na obrázku 5.4 vyobrazena analogie mezi netlumeným jednoduchým harmonickým oscilátorem a netlumeným Duffingovým oscilátorem.

Vhodnou volbou parametrů lze dosáhnout chaotického chování, při němž systém vykazuje citlivostní závislost na počáteční podmínky. Tuto závislost ukazuje

obrázek 5.5, na kterém je patrná rozdílnota trajektorií při malé změně počátečních podmínek. Modrá trajektorie je pro počáteční nastavení $(1, 00; 2, 00)$ a červená pro $(1, 01; 2, 01)$.



Obr. 5.5: Trajektorie Duffingova oscilátoru s buzením ve fázovém prostoru

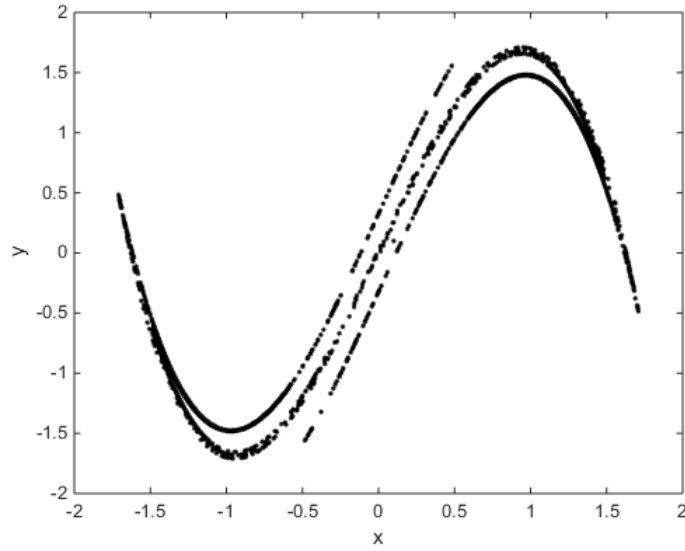
Duffingův oscilátor je prototyp systému s nelineární dynamikou, který byl úspěšně použit jako model různých fyzikálních procesů. Příkladem mohou být: Nelineární elektronické obvody, parametrické zesilovače založené na Josephsonově jevu a ionizační vlny v plazmatu.

Stabilizace Duffingovy mapy

Duffingova mapa 5.7 je diskretní verze dynamického systému 5.4, kterou lze parametrizovat pomocí konstant a a b . Na obrázku 5.6 je vyobrazen atraktor Duffingovy mapy pro obvyklé nastavení $a = 2,75$ a $b = 0,2$, pro které vykazuje chaotické chování.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= -bx_n + ay_n - y_n^3 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Vyšetření periodických orbitů vyšších řádů Duffingovy mapy je obecně realizováno numericky. V našem případě byl pro výpočet hodnot orbitů s periodou dva využit software TISEAN (Nonlinear Time Series Analysis). Konkrétní hodnoty periodických orbitů, ve kterých bude systém stabilizován: $x_1 = 0,85726$ a $x_2 = 1,40286$.



Obr. 5.6: Atraktor Duffingovy mapy pro $a = 2,75$ a $b = 0,15$, počáteční body: $(0, 1; 0, 1)$

Genetický algoritmus byl použit k optimalizaci parametrů K , R a F_{max} stabilizující sekvence ETDAS, která je pro Duffingovu mapu následující:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= y_n + Fn \\
 y_{n+1} &= -bx_n + ay_n - y_n^3 \\
 Fn &= K[(1 - R)S_{n-2} - x_n] \\
 S_n &= x_n + RS_{n-2}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Nastavení genetického algoritmu:

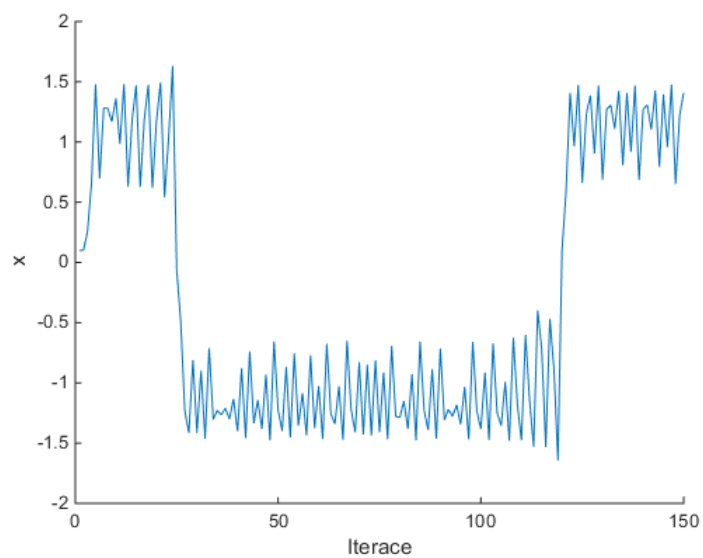
```

PopulationSize = 300;
LB = [1 -4 0];
UB = [2.5 -1 0.5];
SelectionFcn = selectiontournament;
SelectionSize = 4;
EliteCount = 0.05*PopulationSize;
Generations = 500;

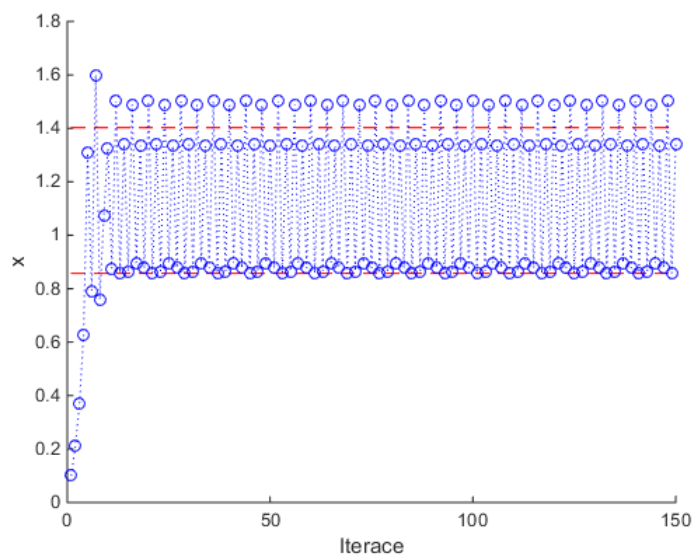
```

Nastavení LB a UB vyplynulo z předchozího testování vhodného omezení parametrů. Parametry byly omezeny rozsahem: $K \in \langle 1; 2,5 \rangle$, $R \in \langle -4; -1 \rangle$ a $F_{max} \in \langle 0; 0,5 \rangle$. Na obrázku 5.7 je simulace nestabilizované sekvence kmitů Duffingův oscilátor pro parametry $a = 2,75$ a $0,2$. Testování bylo zopakováno stokrát a z dosažených výsledků byly vybrány parametry pro minimální hodnotu kritériální funkce.

Výsledné parametry jsou: $K = 1,98100$, $R = -2,62290$ a $F_{max} = 0,22872$.



Obr. 5.7: Nestabilizovaná Duffingova mapa pro počáteční body $(0, 1; 0, 1)$



Obr. 5.8: Stabilizovaná Duffingova mapa pro počáteční body $(0, 1; 0, 1)$

6 ZÁVĚR

Předložená diplomová práce uvedla čtenáře do složitého problému teorie deterministického chaosu. Stručně představila nejčastější chaotické systémy a metody jejich stabilizace. Dále uvedla základní heuristické a metaheuristické optimalizační metody a poukázala na možnosti jejich parametrizace v knihovně Global Optimization Toolbox systému MATLAB.

Důraz je kladen na stabilizaci systému známého jako logistická mapa, která je názornou reprezentací jednoduchého jednodimenzionálního chaotického systému, a Hénonovy mapy, která v práci zastupuje třídu dvoudimenzionálních systémů deterministického chaosu. U každého systému byla uvedena syntaxe použitých stabilizujících formulí a byla zdůrazněna rizika vyplývající z charakteru diskutovaných Pyragasových metod. Optimalizace parametrů proběhla metodami pattern search (PS), simulovaného žíhání (SA) a genetických algoritmů (GA). Výsledky jednotlivých simulací jsou shrnuty v tabulkách a na závěr mezi sebou porovnána nejlepší dosažená řešení. V tabulkách jsou také uvedeny statistické charakteristiky zpracované v softwaru Minitab. Z experimentálních výsledků byly vyvozeny závěry, které budou uvedeny dále. Prezentovány jsou posloupnosti (diskrétní časový průběh) vybraných chaotických systémů před a po stabilizaci, přičemž pro lepší názornost jsou nestabilizované systémy vykresleny spojitě.

Dva již zmíněné umělé systémy jsou doplněny o zajímavý reálný systém Duffingova oscilátoru, jehož stabilizace byla náročnější. I přes překážky vycházející jak ze zmíněného problému, tak z nesnadné parametrizace genetických algoritmů lze konstatovat, že výsledná stabilizace systému je velmi uspokojivá. Přesnost dosaženého řešení je do jisté míry zpochybnitelná, protože numericky získané odhady hodnot periodických orbitů pomocí softwaru TISEAN nebyly jinak verifikovány. Přesto lze konstatovat, že nalezené řešení statisticky vyhovuje záměru stabilizace.

Experimentálně podložené závěry poplatné prezentovaným systémům jsou následující:

- *Metodu TDAS* lze použít pro charakterově jednodušší úlohy stabilizace logistického zobrazení a Hénonovy mapy v $p - 1$ orbitu, kde poskytuje v případě Hénonovy mapy lepší výsledky než její modifikovaná verze ETDAS, která je výpočetně i implementačně náročnější.
- *Modifikovaná Pyragasova metoda ETDAS* potvrdila schopnost řešit i složitější úlohy stabilizace s periodickými orbity vyšších řádů. Stabilizační formule je dostatečně pokročilá i pro řízení reálných systémů, což bylo potvrzeno na úloze Duffingova oscilátoru.
- *Algoritmus PS* je velmi rychlá optimalizační metoda, která pro jednodušší úlohy může být efektivnější volbou než pokročilejší metaheuristiky GA a SA.

Největší pochopitelnou slabinou metody je nutnost zadání výchozího bodu. Pokud je neznámých proměnných více, je těžké zvolit vhodnou kombinaci výchozích bodů. Dále byla zkoumána konvergentní oblast řešení pro zadání výchozího bodu parametru K , která v rozsahu $\langle -2; 2 \rangle$ není pro oba zvolené chaotické systémy příliš velká.

- Vliv velikosti počáteční populace GA v diskutovaném rozsahu 5 až 400 pro stabilizace v $p - 1$ orbitu není dle hodnot zvolené kritériální funkce příliš významný. I pro malé populace byla metoda schopna nalézt kvalitní řešení. Avšak pro malé populace značně vzroste průměr hodnot kritériální funkce a taktéž i směrodatná odchylka. To jest pro malé populace je GA méně robustní. Tato tendence je ještě více patrná při náročnější úloze stabilizace v $p - 2$ orbitu, kde malé populace neposkytují akceptovatelná řešení. Z výsledků dále vyplývá, že velká počáteční populace nemusí nutně znamenat lepší řešení. Avšak tento závěr nelze zgeneralizovat a je poplatný danému nastavení algoritmu. Vliv velikosti populace má ale značný dopad na celkovou dobu trvání běhu algoritmu. Pro malé populace jsou to řádově jednotky sekund a pro vyšší populace doba trvání běhu algoritmu vzroste až na tisíce.
- U metody SA byly testovány různé varianty výchozích teplot, které jak se ukázalo, neměly významný vliv na dosažené výsledky. Technika SA je rychlejší než ekvivalentní GA, což plyne z charakteru metody. Zkoumaná konvergentní oblast byla stejná jako při použití metody PS, ovšem diskutovaná metoda si poradí i s nevhodně zadaným výchozím bodem a nezastaví průběh optimalizace.
- Na jednodušších úlohách stabilizace v $p - 1$ orbitu bylo úspěšnější SA, avšak s výraznějšími hodnotami statistických charakteristik. Metoda GA spolu s ET-DAS potvrdila svoji robustnost a schopnost řešit úspěšně složitější úlohy stabilizace v $p - 2$ orbitu pro oba zvolené chaotické systémy.
- Techniku GA lze nasadit i na charakterově složitější úlohy reálných systémů. Možnosti parametrizace GA jsou opravdu široké a při správném nastavení lze dosáhnout velmi uspokojivých výsledků.

Teorie deterministického chaosu je velmi zajímavá a dosud ještě ne zcela prozkoumaná oblast vědy, která prakticky poskytuje mnoho aplikačních možností. Jedním z cílů práce bylo uvést čtenáře do základů problematiky deterministického chaosu a poukázat na jeho vlastnosti, včetně metod jeho stabilizace. V ohledu použití uvedené teorie v praxi byl vhodně zvoleným příkladem Duffingův oscilátor.

V závěru bych chtěla poznamenat, že mi řešení předložené práce poskytlo významné rozšíření obzorů v oblasti nelineárních systémů, respektive v ohledu deterministického chaosu. Pojetí stabilizace systémů (vzniklé v důsledku řízení), které je velmi důležité v automatizaci, bylo v případě deterministického chaosu odlišné.

Tato práce mi rovněž změnila celkový pohled na věci okolo nás. Jsem ráda, že jsem měla tu možnost věnovat se optimalizačním technikám a zajímavým problémům v kontextu deterministického chaosu. Znalost problémů deterministického chaosu může být nejen velmi důležitá v již známých úlohách inženýrské praxe, ale může být využita i tam, kde to není na první pohled zřejmé. "Kdo ví, zda motýl, který při psaní této práce sedl na můj notebook, nezpůsobí jednou vlahý letní déšť či zimní bouři".

LITERATURA

- [1] J. Macur *Dynamické systémy* [online]. [cit. 2.4.2016]. Dostupné z: <<http://www.fce.vutbr.cz/studium/materialy/Dynsys/Default.htm>>.
- [2] B. Mandelbrot (1983), *The fractal geometry of nature*. Macmillan, ISBN 978-0-7167-1186-5.
- [3] B. Mandelbrot (2004), *Fractals and Chaos*. Berlin: Springer. p. 38, ISBN 978-0-387-20158-0.
- [4] N. Gordon (2000), *Introducing fractal geometry*. Duxford: Icon. p. 71, ISBN 978-1-84046-123-7.
- [5] G. A. Edgar (1993), *Classics on Fractals*. Addison-Wesley Publishing Company, ISBN 978-0201587012.
- [6] J. McNally (2010) *Earth's most stunning natural fractal patterns*. Science, [online]. [cit. 17.5.2016]. Dostupné z: <<http://www.wired.com/2010/09/fractal-patterns-in-nature/>>.
- [7] M. J. Feigenbaum (1978), *Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations*. Journal of Statistical Physics, vol. 19(1).
- [8] P. Pauš (2003), *Počítačové generování fraktálních množin* [online]. [cit. 20.5.2016]. Dostupné z: <<http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~pausp Petr/html/skola/fraktaly/reserse.htm>>.
- [9] R. M. May (1976), *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, vol. 261(5560), pp. 459-467.
- [10] B. Van der Pol (1926), *On relaxation-oscillations*. The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci., vol. 2(7), pp. 978-992.
- [11] L. Arnold, V. Wihstutz (1986), *Lyapunov Exponents*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1186, ISBN 978-3-540-16458-6 .
- [12] R. Devaney (1986), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, ISBN 978-0201130461.
- [13] J. Milnor (1985), *On the Concept of Attractor*. Comm. Math. Phys., vol. 99), pp. 177-195.

- [14] R. Lozi (1978),
Un attracteur étrange (?) du type attracteur de Hénon. Le Journal de Physique Colloques, vol. 39(C5), pp. 9-10.
- [15] T. Matsumoto (1984), *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-31(12), pp. 1055–1058.
- [16] P. F. Verhulst (1845), *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, vol. 18, pp. 1-42.
- [17] M. Hladík (2006) *Aplikace deterministického chaosu v praxi* [online]. [cit. 25.4.2016] Dostupné z: <<http://www.hungry-lord.wz.cz/data/Aplikace.php>>.
- [18] M. Andrecut(1998), *Logistic Map as a Random Number Generator*. Int. J. Mod. Phys. B, vol. 12,921.
- [19] Edward N. Lorenz (1963), *Deterministic non-periodic flow*. Journal of Atmospheric Science, vol. 20, pp. 130-141.
- [20] G. MacCabe (2013) *Edward Lorenz's Strange Attraction* [online]. [cit. 26.4.2016] Dostupné z: <<https://logicaltightrope.com/2013/08/29/edward-lorenzs-strange-attraction/>>.
- [21] X. Wang, M.A. Wang (2008), *Hyperchaos generated from Lorenz system*. Physica A, vol. 387(14), pp. 3751-3758.
- [22] C.A. Jones, N.O. Weiss, F. Cattaneo (1985), *Nonlinear dynamos: a complex generalization of the Lorenz equations*. Physica D, vol. 14(2), pp. 161-176.
- [23] J. Xu, G. Cai, S. Zheng (2009), *Adaptive synchronization for an uncertain new hyperchaotic Lorenz system*. Int. J. Nonlinear Sci., vol. 8(1), pp. 117-123.
- [24] D. Gonze (2015) *The logistic equation* [online]. [cit. 2.5.2016] Dostupné z: <<http://homepages.ulb.ac.be/~dgonze/TEACHING/logistic.pdf>>.
- [25] J. Arino (2008) *The logistic map* [online]. [cit. 5.5.2016] Dostupné z: <http://server.math.umanitoba.ca/~jarino/courses/math3820/math3820_analysis_logistic.pdf>.
- [26] J.M. Ottino (1989), *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge.

- [27] P. Gaspard (2005) *Rössler systems* [online]. [cit. 6.4.2016] Dostupné z: <<http://homepages.ulb.ac.be/~gaspard/G.Roessler.Encycl.05.pdf>>.
- [28] C. Letellier, O. E. Rössler (2006) *Rössler attractor*. Scholarpedia [online]. [cit. 1.4.2016] Dostupné z: <http://www.scholarpedia.org/article/Rössler_attractor>.
- [29] M. Hénon (1976), *A two-dimensional mapping with a strange attractor*. Communications in Mathematical Physics, vol. 50(1), pp. 69-77.
- [30] J.F. Heagy (1992), *A physical interpretation of the Hénon map*. Physica D, vol. 57, pp. 436-446.
- [31] W. F. Al-Shameri (2012), *Dynamical properties of the Hénon mapping*. Int. Journal of Math. Analysis, vol. 6(49), pp. 2419-2430.
- [32] H. K. Sarmah, R. Paul (2010), *Period Doubling Route to Chaos in a Two Parameter Invertible Map with Constant Jacobian*. IJRRAS, vol. 3(1).
- [33] M. Hénon (1982), *On the numerical computation of Poincaré maps*. Physica D5, pp. 412-414.
- [34] O. Rössler (1976), *An equation for continuous chaos*. Phys. Lett., vol. A57(5), pp. 397-398.
- [35] O. Rössler (1979), *Continuous chaos - four prototype equations*. Ann. NY Acad. Sci., vol. 316, pp. 376-392.
- [36] O. Rössler (1979), *An equation for hyperchaos*. Phys. Lett., vol. A71, pp. 155-157.
- [37] C. Letellier, E. Roulin, B. Maheu (1995), *Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization*. Chaos, vol. 5(1), pp. 271-282.
- [38] J. L. Lagrange (1811), *Mécanique analytique*.
- [39] E. W. Weisstein (2005), *Double Pendulum*. ScienceWorld.
- [40] C. Fox (1987), *An introduction to the calculus of variations*. Courier Dover Publications, ISBN 978-0-486-65499-7.
- [41] K. E. Atkinson (1989), *An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.)*. New York: John Wiley and Sons, ISBN 978-0-471-50023-0.

- [42] E. Schöll, H. G. Schuster (2008), *Handbook of Chaos Control*. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, ISBN 9783527406050.
- [43] W. L. Ditto, L. M. Pecora (1993), *Mastering Chaos*. Scientific American, vol. 269(2).
- [44] K. Pyragas (1992), *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*. Physics Letters A, vol. 170, pp. 421-428.
- [45] J. E. S. Socolar, D. W. Sukow, D. J. Gauthier (1994), *Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems*. Phys. Rev. E, vol. 50(4), pp. 3245-3248.
- [46] J. M. González-Miranda (2004), *Synchronization and Control of Chaos - An Introduction for Scientists and Engineers* Imperial College Press, ISBN 1-86094-488-4.
- [47] W. Just, E. Reibold, K. Kacperski, P. Fronczak, J. A. Holyst, H. Benner (2000), *Influence of stable Floquet exponents on time-delayed feedback control*. Phys. Rev. E, vol. 61(5), pp. 5045-5056.
- [48] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke (1990), *Controlling chaos*. Phys. Rev. Lett., vol. 64(11), pp. 1196-1199.
- [49] K. Pyragas (2001), *Control of Chaos via an Unstable Delayed Feedback Controller*. Phys. Rev. Lett., vol. 86(11), pp. 2265-2268.
- [50] K. Pyragas (1995), *Control of Chaos via extended delay feedback*. Physics Letters A, vol. 206, pp. 323-330.
- [51] Mathworks [online], Dostupné z: <<http://www.mathworks.com/products/global-optimization/>>.
- [52] D. Goldberg (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Artificial Intelligence, Addison-Wesley, ISBN 978-0201157673.
- [53] K. Švihálková (2014), *MATLAB/Global Optimization Toolbox: řešení optimalizačních problémů*. bakalářská práce, FSI VUT v Brně, Vedoucí práce: doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D..
- [54] M. J. D. Powell (1998), *Direct Search Algorithms for Optimization Calculations*. Acta Numerica, vol. 7.

- [55] R. Šenkeřík (2008), *Optimal Control of Deterministic Chaos*. doctoral thesis, Tomas Bata University in Zlín, Faculty of Applied Informatics, Supervisor: Assoc. Prof. Ivan Zelinka, Ph.D..
- [56] R. Matoušek, L. Dobrovský, P. Minář, K. Mouralová (2014), *A Note about Robust Stabilization of Chaotic Hénon System using Grammatical Evolution*. Nostradamus.
- [57] I. Kovacic, M. J. Brennan (2011), *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and Their Behaviour*. John Wiley and Sons, ISBN 978-0-470-71549-9.
- [58] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi (1983), *Optimization by simulated annealing*. SCIENCE, vol. 220(4598), pp. 671-680.
- [59] Z. Oplátková, P. Ošmera, M. Šeda, aj. (2008), *Evoluční výpočetní techniky - principy a aplikace* Praha: BEN-Technická literatura, ISBN 80-7300-218-3.
- [60] P. Holmes, D. Whitley (1983), *On the attracting set for Duffing's equation, II: A geometrical model for moderate force and damping*. Physica 7D, pp. 111-123.
- [61] S. Wiggins(1990), *Application to the Dynamics of the Damped, Forced Duffing Oscillator*. Springer, New York, NY, USA.
- [62] R. D. Peters, M. Russel (2012) *Autocorrelation Phase Portrait* [online]. [cit. 20.5.2016]. Dostupné z: <<http://physics.mercer.edu/hpage/portrait/autoc.html>>.